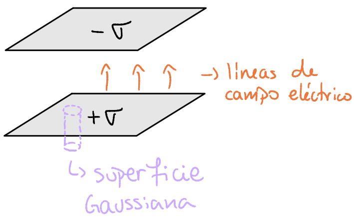
P1 Para refrescar un poco los conceptos, veamos cómo encontrar la ecuación:

$$C = \frac{A\,\varepsilon}{d}$$

que es la capacitancia de un condensador de placas paralelas de sección transversal A, separadas por una distancia d en un medio dieléctrico con permitividad ε.



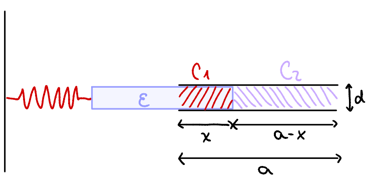
Para una placa:

$$\iint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libre\ enc} \Leftrightarrow D_z\, 2A = \sigma A$$

$$\vec{D} = \frac{\sigma}{2}\hat{z} \Rightarrow \vec{D}_{tot} = \sigma\, \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{z} \Rightarrow \Delta V = \int_0^d \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{\sigma}{\varepsilon} d \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{\sigma d/\varepsilon} = \frac{A\,\varepsilon}{d}$$

Con esto, podemos encontrar la capacitancia del sistema:



$$C_1 = \frac{A_1\,\varepsilon}{d} = \frac{x a\,\varepsilon}{d}$$

$$C_2 = \frac{A_2\,\varepsilon_0}{d} = \frac{a(a-x)\varepsilon_0}{d}$$

Misma ddp $\Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2$

$$C_{eq} = \frac{x a\,\varepsilon}{d} + \frac{a(a-x)\varepsilon_0}{d}$$

Energía del sistema: $U_{cond} = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{a}{2d} V_0^2 \left[x(\varepsilon-\varepsilon_0) + a\varepsilon_0\right]$

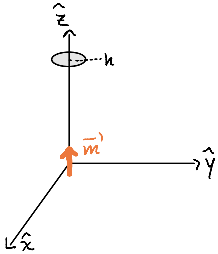
Como el trabajo lo ejerce el sistema: $\vec{F}_{cond} = \nabla U_{cond} = \frac{a V_0^2}{2d}(\varepsilon-\varepsilon_0)\hat{x}$

La fza del resorte: $\vec{F} = -Kx\,\hat{x}$

En la posición de equilibrio $(x=l)$, la suma de fuerzas es nula:

$$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{a V_0^2}{2d}(\varepsilon-\varepsilon_0) = K\,l \Rightarrow \varepsilon = \frac{2Kld}{aV_0^2} + \varepsilon_0$$

P2| $\vec{m} = m\hat{z}$, $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}\left[3\rho z\,\hat{\rho} + (2z^2-\rho^2)\hat{z}\right]$



a) Si $a \ll d$, podemos aproximar a la espira por un dipolo magnético, con momento $\vec{m} = I a^2 \pi \hat{z}$.
Con ello, la energía es: $U = -\vec{m}\cdot\vec{B}$

$$U = -\frac{\mu_0 m I a^2 \pi}{4\pi(\rho^2+z^2)^{5/2}}(2z^2-\rho^2) = \frac{\mu_0 m I a^2}{4}\,\frac{\rho^2-2z^2}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}$$

Nos interesa la componente en z de la fuerza, pero antes de derivar imponemos $\rho = 0$:

$$F_z = \nabla(-\vec{m}\cdot\vec{B}) = -\frac{\mu_0 m I a^2}{4}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-2z^2}{z^5}\right)\hat{z} = -\frac{\mu_0 m I a^2}{4}\,6z^{-4}\,\hat{z} = -\frac{3}{2}\,\mu_0 m I a^2 \pi\,\frac{1}{z^4}\,\hat{z}$$

$$F_z\Big|_{z=h} - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{2Mgh^4}{3\mu_0 m a^2}$$

b) Sin la aprox. usamos

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{F} = I\int_0^{2\pi} a\,d\varphi\,\hat{\varphi}\times\vec{B} = \frac{\mu_0 m a I}{4\pi(a^2+h^2)^{5/2}}\left\{3ah\int_0^{2\pi} d\varphi\,\underbrace{(\hat{\varphi}\times\hat{\rho})}_{-\hat{z}} + (2h^2-a)\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi\,\underbrace{(\hat{\varphi}\times\hat{z})}_{\hat{\rho}}}_{0}\right\}$$

$$= \frac{3\mu_0 m a^2 I}{4\pi(a^2+h^2)^{5/2}}\,2\pi\,(-\hat{z}) = -\frac{3}{2}\,\frac{\mu_0 m a^2 h I}{(a^2+h^2)^{5/2}}\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{2}{3}\,\frac{Mg(a^2+h^2)^{5/2}}{\mu_0 m a^2 h}$$

P3 Vamos por las inductancias propias. Asumiremos que el campo magnético va en la dirección $\hat{\varphi}$.

$$L_1: \vec{B} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi\rho}\hat{\varphi} \Rightarrow \Phi_1 = N_1 \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 N_1^2 I_1}{2\pi}\int_0^h \int_a^b \frac{1}{\rho}\, d\rho\, dz$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 I_1 h \ln(b/a)}{2\pi} \Rightarrow L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 h}{2\pi}\ln(b/a)$$

Para L_2 es análogo: $L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 h}{2\pi}\ln(b/a)$

Para la mutua, calculamos el flujo que genera el campo de la bobina 1 sobre una espira de la bobina 2, y multiplicamos por N_2

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi\rho}\hat{\varphi} \Rightarrow \Phi_2 = \int_a^b\int_0^h \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi\rho}\, dz\, d\rho = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi} h \ln(b/a)$$

$$\Rightarrow M = N_2 \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{2\pi} h \ln(b/a)$$

b) $$\varepsilon_1 = -L_1\dot{I}_1 - M\dot{I}_2 = -\frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln(b/a)\left[N_1^2\dot{I}_1 + N_1 N_2 \dot{I}_2\right]$$

$$\varepsilon_2 = -L_2\dot{I}_2 - M\dot{I}_2 = -\frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln(b/a)\left[N_2^2\dot{I}_2 + N_1 N_2 \dot{I}_1\right]$$

c) $$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{N_1(N_1\dot{I}_1 + N_2\dot{I}_2)}{N_2(N_2\dot{I}_2 + N_1\dot{I}_1)} = \frac{N_1}{N_2}$$