P1| Tenemos una onda plana electromagnética dada por

$$\vec{E} = E_o \hat{x} \cos(Kz - \omega t),$$

propagándose en un medio caracterizado por ε y μ.

a) La frecuencia angular de la onda (muchas veces le diremos frecuencia a esto) es ω, y la frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

La velocidad de propagación es $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

K es el número de onda, y $\lambda = \frac{2\pi}{K}$ la long. de onda.

b) El campo magnético lo encontramos con: $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{y} = + E_o K \hat{y} \sin(Kz - \omega t) = + \partial_t \vec{B} \quad / \int dt$$

$$E_o K \hat{y} \int \sin(Kz - \omega t) = \vec{B}$$

$$\vec{B} = E_o K \hat{y} \; \frac{-\cos(Kz - \omega t)}{-\omega} = \frac{K}{\omega} E_o \hat{y} \cos(Kz - \omega t)$$

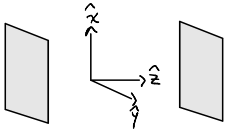
Propuesto: mostrar que $\omega = vK$, con $v = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$

c) La energía se propaga en $\hat{z}$, que es la dirección de propagación de la onda.

Una forma de verlo explícitamente es desde el vector de Poynting, que corresponde a la energía por unidad de área y tiempo.

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ → su dirección indica la propagación de la energía.

P2) En este problema aparece una fem, ya que $V(t) \to \vec{E}(t) \to \vec{B}(t) \to \varepsilon$ en la espira. Por eso, seguiremos ese camino para encontrar la fem. Además, diremos que los campos sólo dependerán de la distancia radial al centro del condensador, ie, $E \neq E(z)$ y $B \neq B(z)$.

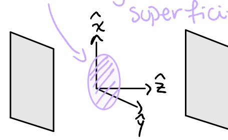


$$\Rightarrow V(t) = \int \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^d E\,dz = E d \Rightarrow \vec{E} = \frac{V(t)}{d}\,\hat{z}$$

Ahora, consideremos la ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad , \text{ con } \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} \;,\; \vec{J} = g\vec{E} \;,\; \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \vec{B} = g\vec{E} + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} = \frac{g}{d}V(t)\hat{z} + \frac{\varepsilon_0}{d}\dot{V}(t)\hat{z} \qquad \Big/ \iint \cdot d\vec{S}$$



$$\frac{1}{\mu_0}\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{g}{d}V(t)\,\pi r^2 + \frac{\varepsilon_0}{d}\dot{V}(t)\,\pi r^2$$

$$\frac{1}{\mu_0} B\, 2\pi r = \frac{g}{d}V(t)\,\pi r^2 + \frac{\varepsilon_0}{d}\dot{V}(t)\,\pi r^2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\frac{r}{d}\left(gV + \varepsilon_0 \dot{V}\right)\hat{\varphi}$$

Ahora, calculamos el flujo sobre la espira cuadrada. Para ello es útil reconocer que:

$$d\vec{S}_\square = dx\,dz\,\hat{y} \quad , \text{ con } x \in [0,b] \quad z \in [e, e+a]$$

$x^2 + y^2 = r^2$

$r\cos\varphi = x$

$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0}{2d}\left(gV + \varepsilon_0\dot{V}\right)\int_e^{e+a}\int_0^b r\left(-\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}\right)\cdot dx\,dz\,\hat{y}$$

$$= \frac{\mu_0}{2d}\left(gV + \varepsilon_0\dot{V}\right)\int_e^{e+a}\int_0^b \underbrace{r\cos\varphi}_{x}\,dx\,dz = \frac{\mu_0}{2d}\left(gV + \varepsilon_0\dot{V}\right)\frac{b^2}{2}\,a$$

Con ello, la fem: $\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = -\frac{\mu_0}{4d} ab^2 (g\dot{V} + \varepsilon_0 \ddot{V})$

c) Si $V(t) = V_0 e^{-gt/\varepsilon_0} \Rightarrow \dot{V}(t) = -\frac{g}{\varepsilon_0} V(t)$ y $\ddot{V}(t) = \frac{g^2}{\varepsilon_0^2} V(t)$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{\mu_0 ab^2}{4d} \left[-\frac{g^2}{\varepsilon_0} V(t) + \frac{g^2}{\varepsilon_0} V(t) \right] = 0$$

P3| $\vec{J}_f = \sigma \vec{E}$

Ecs de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho_f \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu\sigma \vec{E}$$

a) $\rho_f(t=0) = \rho_0 \neq 0$

Según la ecuación de continuidad: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$

$$\rho = \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} \quad y \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = 0 \Rightarrow \rho(t) = \rho_0 e^{-(\sigma/\varepsilon)t}$$

Podemos ver que la carga inicial será disipada, y el tiempo depende del material (σ, ε). Para un conductor perfecto $(\sigma \to \infty)$, la exponencial decae rápidamente. No hay una dirección privilegiada, pero las cargas deben irse a los extremos del conductor.

b) Ahora tenemos $\rho_f = 0$.

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad && \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \\ &\nabla \cdot \vec{B} = 0 && \nabla \times \vec{B} - \mu\varepsilon \partial_t \vec{E} = \mu\sigma \vec{E} \end{aligned}$$

$$\to \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\partial_t (\nabla \times \vec{B}) \Leftrightarrow \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{=0}) - \nabla^2 \vec{E} = -\partial_t \{ \mu\varepsilon \partial_t \vec{E} + \mu\sigma \vec{E} \}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \partial_t^2 \vec{E} = \mu\sigma \partial_t \vec{E}$$

$$\to \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) - \mu\varepsilon \partial_t (\nabla \times \vec{E}) = \mu\sigma \nabla \times \vec{E} \Leftrightarrow \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{B}}_{=0}) - \nabla^2 \vec{B} + \mu\varepsilon \partial_t^2 \vec{B} = -\mu\sigma \partial_t \vec{B}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{B} - \mu\varepsilon \partial_t^2 \vec{B} = \mu\sigma \partial_t \vec{B}$$

Los campos satisfacen la misma ecuación de ondas. Veamos que admiten soluciones del tipo de ondas planas.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \partial_z^2 \vec{E} = -k^2 \vec{E} \quad ; \quad \partial_t^2 \vec{E} = -\omega^2 \vec{E} \quad ; \quad \partial_t \vec{E} = -i\omega \vec{E}$$

$$\Rightarrow -k^2 \vec{E} + \mu\varepsilon\omega^2 \vec{E} = -\mu\sigma(i\omega)\vec{E} \Rightarrow (\mu\varepsilon\omega^2 - k^2 + i\mu\sigma\omega)\vec{E} = 0$$

Tenemos soluciones de ondas planas si $k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$. Con esto ya vemos que el vector de onda es complejo. Nos queda encontrar su parte real e imaginaria.

$$k = k_R + ik_I \Rightarrow k^2 = (k_R + ik_I)(k_R + ik_I) = k_R^2 - k_I^2 + 2ik_R k_I$$

$$\Rightarrow \mu\varepsilon\omega^2 = k_R^2 - k_I^2 \qquad y \quad \mu\sigma\omega = 2k_R k_I$$

$$\frac{(\mu\sigma\omega)^2}{4} = k_R^2 k_I^2 \Rightarrow \mu\varepsilon\omega^2 = k_R^2 - \frac{(\mu\sigma\omega)^2}{4k_R^2} \Rightarrow k_R^4 - \mu\varepsilon\omega^2 k_R^2 - \frac{(\mu\sigma\omega)^2}{4}$$

$$\Rightarrow k_R^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2 \pm \sqrt{(\mu\varepsilon\omega^2)^2 + (\mu\sigma\omega)^2}}{2} = \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right]$$

Para que $k_R \in \mathbb{R}$, sólo nos sirve la solución con $+$.

$$k_I^2 = k_R^2 - \mu\varepsilon\omega^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 2\right]$$

$$\Rightarrow k = k_R + ik_I \ , \text{ con } \quad k_R = \left\{\frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right]\right\}^{1/2}$$

$$k_I = \left\{\frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right]\right\}^{1/2}$$

Con ello, nuestras ondas planas son de la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k_I z} e^{i(k_R z - \omega t)} \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{-k_I z} e^{i(k_R z - \omega t)}$$

es decir, la parte imaginaria del vector de onda es responsable del decaimiento.

Si consideramos que la onda decae completamente cuando su amplitud decae en un factor e^{-1} (definido así en Griffiths), tenemos que si d es la distancia que viaja la onda (o mejor dicho, la profundidad superficial):

$$\vec{E}_0 e^{-k_I d} \stackrel{!}{=} \vec{E}_0 e^{-1} \Rightarrow k_I d = 1 \Rightarrow d = 1/k_I$$

c) Les dejo esto a uds. (Para que no se preocupen mucho de la dependencia de la frec. de la permitividad $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, usen la del vacío u otro material si quieren).