FI2002-3 Electromagnetismo
Profesor: Ignacio Andrade
Auxiliares: Vicente Pedreros & Diego Rodríguez
Ayudante: Matías Urrea

Auxiliar 24: Ecuaciones de Maxwell y Ondas

23 de noviembre

Resumen

(1) Ecuaciones de Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

(2) Ecuación de ondas

$$\nabla^2\vec{\mathcal{O}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\mathcal{O}}}{\partial t^2}=0$$

(3) Onda plana monocromática

$$\vec{E}=\vec{E}_0\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)$$

(4) Vector de Poynting

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

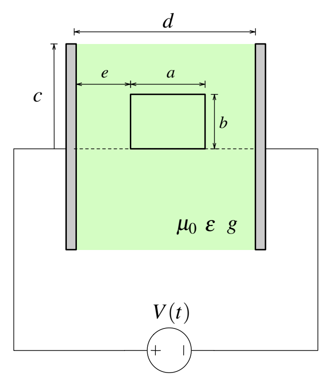
P1. Una onda electromagnética tiene un campo eléctrico de la forma $\vec{E}=E_0\cos(kz-\omega t)\hat{x}$ y se propaga por un medio lineal con permitividad ε y permeabilidad μ.

a) Identifique la frecuencia, velocidad de propagación, número y longitud de onda.

b) Determine el campo magnético asociado a la onda.

c) Indique la dirección en la que se propaga la energía.

P2. Se tienen dos discos conductores paralelos de radio c y separados una distancia $d \ll c$ entre los cuales se ha colocado una sustancia homogénea de conductividad g y permitividad ε_0. Los discos se someten a una diferencia de potencial $V(t)$ conocida. Calcula la fem inducida en un rectángulo de lados a y b, como se muestra en la figura. Evalúe para el caso de que $V(t)=V_0\exp(-gt/\varepsilon_0)$.



P3. Considere un medio conductor imperfecto con permitividad ε y permeabilidad μ. En dicho medio, se cumple la ley de Ohm $\vec{J}_f=\sigma\vec{E}$, donde σ es la conductividad del medio. Las ecuaciones de Maxwell que se satisfacen en dicho medio son:

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon}\rho_f, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0, \tag{2}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla\times\vec{B}-\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu\sigma\vec{E} \tag{4}$$

a) Muestre que si en $t = 0$ hay una densidad de carga inicial, se disipará por el medio. Comente sobre el tiempo que demora en disiparse y hacia dónde fluye la carga.

b) Considere el régimen donde la carga incial ya fue totalmente disipada. Busque soluciones de ondas planas transversales de frecuencia ω viajando en la dirección $\vec{\hat{z}}$ de la forma:

$$\vec{E}(t,z) = \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} \qquad \vec{B}(t,z) = \vec{B}_0 e^{i(kz-\omega t)}. \tag{5}$$

Muestre que el número de onda k es de la forma $k = k_R + ik_I$. Encuentre k_R y k_I como función de ε, μ, ω y σ. ¿Qué tan lejos logra viajar la onda por este medio? (a esa distancia se le llama profundidad superficial).

c) Usando lo anterior, indique el grosor apropiado para un horno microondas que opera con frecuencias $\sim 10^{10}$Hz.