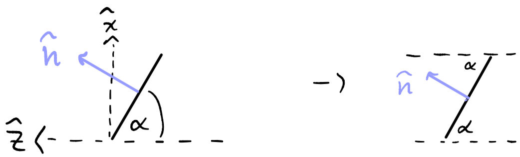
P1) Nos damos una corriente I que corre por el cable de la bobina.

a) El campo del solenoide lo han visto

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z} \quad \rightarrow \text{Campo dentro del solenoide.}$$

Ahora, necesitamos $d\vec{S} = dS\,\hat{n}$



$$\hat{n} = \sin\alpha\,\hat{z} + \cos\alpha\,\hat{x}$$

$$\Rightarrow \Phi = \iint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \mu_0 n I \iint \sin\alpha\, dS = \mu_0 n I \sin\alpha\, \pi b^2 \Rightarrow M = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 n \pi b^2 \sin\alpha$$

b) Si por la espira circula una corriente $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$

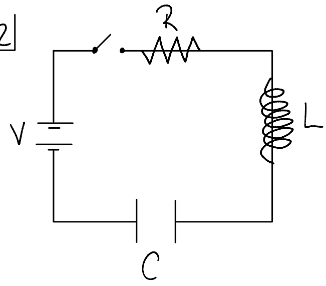
$$\Rightarrow \Phi = M\,I(t) = \pi \mu_0 n b^2 I(t) \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mu_0 \pi b^2 n \dot{I}(t) \sin\alpha = -\mu_0 \pi b^2 n I_0 \omega \cos(\omega t) \sin\alpha$$

es máxima la ddp cuando $-\cos(\omega t) = 1$

$$\Rightarrow \Delta V_{max} = \mu_0 \pi b^2 n I_0 \omega$$

P2



Una vez que el circuito se cierre, podemos usar la Ley de Voltajes de Kirchhoff, donde la fuente de poder y la inductancia son las subidas de voltaje.

$$V + V_L = V_R + V_c$$

$$\Rightarrow V = V_c + \dot{I}L + IR$$

No conocemos la corriente que viaja por el circuito, pero sabemos que:

$$Q = V_c C \quad y \quad \dot{Q} = I \Rightarrow I = C\dot{V}_c$$

$$\Rightarrow V = V_c + LC\ddot{V}_c + RC\dot{V}_c \iff \ddot{V}_c + \frac{R}{L}\dot{V}_c + \frac{1}{LC}V_c = \frac{1}{LC}V$$

Tenemos una EDO, cuya solución es la combinación lineal de la solución homogénea y particular.

Veamos la homogénea: $\ddot{V}_c + \frac{R}{L}\dot{V}_c + \frac{1}{LC}V_c = 0$

Algo de la forma $V_c = Ae^{\lambda t}$ soluciona: $\dot{V}_c = A\lambda e^{\lambda t}$ y $\ddot{V}_c = A\lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \quad ; \left.\begin{matrix} \omega_0^2 \equiv 1/LC \\ \gamma \equiv R/2L \end{matrix}\right\} \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$\Rightarrow$ La solución homogénea es: $V_c = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}$

La particular, se puede ver que $V_c = V$ soluciona la EDO.

$\Rightarrow V_c(t) = V + A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}$, con $A_\pm$ ctes que se determinan de las condiciones iniciales : $V_c(0)$, $\dot{V}_c(0)$.

El término que determina el comportamiento del sistema es

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

- Críticamente amortiguado: $\gamma = \omega_0$, $\lambda_+ = \lambda_-$ y son reales, por lo que no hay oscilaciones

- Sobre-amortiguado: $\gamma > \omega_0$, $\lambda_+ \neq \lambda_-$ y reales, por lo que no hay oscilaciones

- Sub-amortiguado: $\gamma < \omega_0$ $\lambda_+ \neq \lambda_-$ y son complejos, por lo que hay oscilaciones.

P3| a) Campo generado por toroide: $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 N I_2}{2\pi\rho}(-\hat{\phi})$ (Ampère)

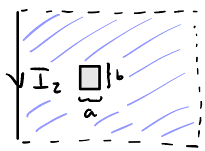
$$\Phi = \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 N I_2}{2\pi} \int_R^{R+a} \frac{d\rho}{\rho} \int_0^b dz = \frac{\mu_0 N I_2 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{R}\right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0 N b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{R}\right)$$

b) $\Phi_2 = M_{21} I_1$. Campo generado por el cable: $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}(-\hat{\phi})$

Φ_2 Es análogo si $I_2 N \to I_1 \Rightarrow M_{21} = \frac{\mu_0 N b}{2\pi} \ln(1 + a/R)$

c) Consideramos el flujo sobre lo de este color



Pero el campo que genera el toroide es sólo dentro de él.

$$\Phi_1 = \int_0^b \int_R^{R+a} \vec{B}_2 \cdot d\rho dz (-\hat{\phi}) = \frac{\mu_0 N I_2 b}{2\pi} \ln(1 + a/R)$$

$$\Rightarrow M_{12} = \frac{\mu_0 N b}{2\pi} \ln(1 + a/R)$$

d) $\mathcal{E} = I_2 R$, pero $\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = -L\dot{I}_2 - M_{21}\dot{I}_1$

$\dot{I}_1 = -I_0 \omega \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow -L\dot{I}_2 + M I_0 \omega \sin(\omega t) = R I_2 \Rightarrow L\dot{I}_2 + R I_2 = M I_0 \omega \sin(\omega t)$$

De la indicación, tenemos la sol particular, y la homogénea es $I_2(0) e^{-\frac{R}{L}t}$

$$I_2(t) = I_2(0) e^{-\frac{R}{L}t} + I_0 M \omega (R \sin(\omega t) - L\omega \cos(\omega t)) / (R^2 + L^2 \omega^2)$$