P1 Para encontrar el campo magnético que genera cada corriente, usamos la ley de Ampère.

→ Cilindro: Nos importa el campo en $\mathcal{P}$, por lo que usaremos un loop circular de radio $r<R$.

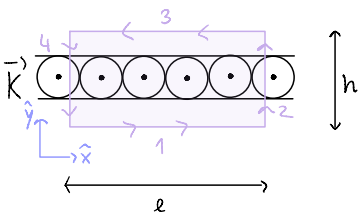
Por simetría cilíndrica, $\vec{B} = B(r)\hat{\theta}$ $\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B(r)\, r\, d\theta = B(r)\, 2\pi r$

$$I_{enc} = \int_0^r\int_0^{2\pi} J(r')\, r'\, d\theta' dr' = 2\pi J_0 \int_0^r r'\, dr' - 2\pi J_0 \int_0^r \frac{(r')^2}{R} dr' = 2\pi J_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right)$$

$$\Rightarrow B(r) = \mu_0 J_0 \left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3R}\right) \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 J_0 \left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3R}\right)\hat{\theta}$$

Evaluamos en el punto $\mathcal{P}$: $\vec{B}(\mathcal{P}) = \mu_0 J_0 \left(\frac{R}{4} - \frac{R^2}{12R}\right)\hat{x} = \frac{\mu_0 J_0 R}{6}\hat{x}$
($\hat{\theta}$ coincide con $\hat{x}$ en $\mathcal{P}$).

→ Plano: Usamos un loop rectangular, en el plano xy. No es necesario en otros, ya que el campo apuntará sólo en $\hat{x}$, y nos interesa evaluar el campo en $\mathcal{P}$.



Recorremos los 4 caminos del loop, lo que se traduce en 4 $d\vec{l}$'s.

1) $d\vec{l} = dx\,\hat{x}$; $x \in [0, l]$, $y = -h/2$
2) $d\vec{l} = dy\,\hat{y}$; $y \in [-h/2, h/2]$ $x = l$
3) $d\vec{l} = dx\,\hat{x}$; $x \in [l, 0]$ $y = h/2$
4) $d\vec{l} = dy\,\hat{y}$; $y \in [h/2, -h/2]$ $x = 0$

$$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B(y)\hat{x}\cdot d\vec{l} = \int_0^l B(y=-h/2)\,\hat{x}\,dx\,\hat{x} + \int_{-h/2}^{h/2} B(y)\,\underbrace{\hat{x}\,dy\,\hat{y}}_{=0} + \int_l^0 B(y=h/2)(-\hat{x})\,dx\,\hat{x} + \int_{h/2}^{-h/2} B(y)\,\underbrace{\hat{x}\,dy\,\hat{y}}_{=0}$$

$$= B(y=-h/2)\,l + B(y=h/2)\,l = (B(h/2) + B(-h/2))\,l$$

Podemos ver que el módulo del campo eléctrico, cumple $B(y) = B(-y)$. Tiene la misma intensidad por arriba que por abajo. Además, nuestro h no tiene nada de especial (es genérico/arbitrario), por lo que:

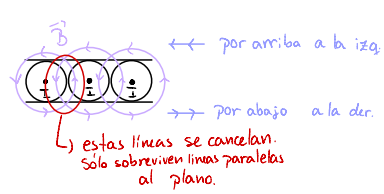
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2B(y)\,l$$

La corriente encerrada, corresponde al módulo de la densidad de corriente por el largo del loop: $I_{enl} = Kl$

$$\text{Ampère} \Rightarrow 2B(y)\,l = \mu_0 K l \Rightarrow B(y) = \frac{\mu_0 K}{2} \Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} \mu_0 K/2\ \hat{x} & x<0 \\ -\mu_0 K/2\ \hat{x} & x>0 \end{cases}$$ no depende de y!

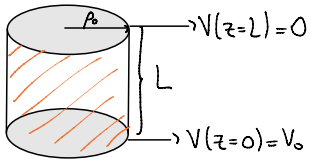
Por principio de superposición, el campo magnético total en el punto $\mathcal{P}$ es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 R}{6}\hat{x} - \frac{\mu_0 K}{2}\hat{x}$$



$\Rightarrow$ El campo se anula si $J_0 = \frac{3K}{R}$.

P2|



$g = g_0 \frac{\rho}{\rho_0}$

Desde el estado estacionario, $\nabla \cdot \vec{J} = 0$. Además, por la simetría del problema vemos que $\vec{J}$ y $\vec{E}$ no pueden depender de φ (coord. angular). Como la diff de potencial es entre los electrodos, las cargas irán de la placa con mayor potencial a uno con menor, ie, viajan en $+\hat{z}$. De esta forma, $\vec{J}$ y $\vec{E}$ apuntan en $\hat{z}$.

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}(J_z) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}(g(\rho) E_z) = 0 \Rightarrow \vec{E} = E_0 \hat{z} \quad \text{(no depende de } z\text{)}.$$

Ahora, para encontrar la cte E_0, usamos la ddp:

$$V_0 = -\int_L^0 \vec{E} \cdot dz \hat{z} = E_0 \int_0^L dz = E_0 L \Rightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{L} \hat{z} \quad \wedge \quad \vec{J} = g\vec{E} = g_0 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{V_0}{L} \hat{z}$$

Para encontrar el campo magnético, se podría usar

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\, d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \text{pero no lo recomiendo.}$$

Mejor Ampère: nos damos un loop que encierre a $\vec{J}$. Como la corriente va en $\hat{z}$, el campo magnético irá en $\hat{\varphi}$.

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \Leftrightarrow \int B(\rho) \hat{\varphi} \cdot \rho\, d\varphi \hat{\varphi} = \mu_0 \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

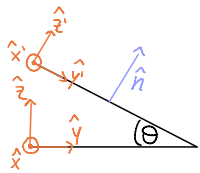
$\rho < \rho_0$

$$\Rightarrow B(\rho)\, 2\pi\rho = \mu_0 \frac{g_0 V_0}{\rho_0 L} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} \rho'^2 d\rho' d\varphi' = \mu_0 \frac{g_0 V_0}{\rho_0 L} \frac{\rho^3}{3} \cdot 2\pi \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 g_0 V_0}{3\rho_0 L} \rho^2 \hat{\varphi}$$

P3 a) Para encontrar la corriente inducida, usamos la ley de Faraday - Lenz

$$\epsilon = -\dot{\Phi}, \qquad \Phi : \text{flujo magnético}$$

por lo que necesitamos el flujo magnético. Para calcularlo, vamos a necesitar la normal de la superficie que cruzará el campo magnético.



$$\Phi = \iint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint B\hat{z}\cdot(dx'dy'\hat{z}') \quad , \quad \hat{z}' = \sin\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$$

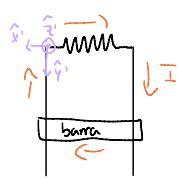
$$\Rightarrow \Phi = B\int_0^{l}\int_0^{y'(t)} \hat{z}\cdot(\sin\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z})\,dx'dy' = Bl\,y'(t)\cos\theta$$

rapidez de la barra $v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$

$$\Rightarrow \epsilon = -Bl\cos\theta\,\frac{dy'(t)}{dt} = -Bl\cos\theta\,v(t)$$

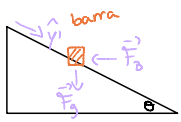
$$\epsilon = IR \Rightarrow I = \frac{-Blv(t)\cos\theta}{R}$$

Dado que el área que cruza el campo magnético crece con el tiempo, el flujo magnético crece con el tiempo. Por ello, el sentido que toma la corriente es horario al verlo desde arriba:



b) Para obtener la velocidad terminal, buscamos la ec. de mov. con 2da ley de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} \iff \vec{F}_B + \vec{F}_g = m\dot{\vec{v}}$$



$$\vec{F}_B = \int I\, d\vec{l} \times \vec{B} = \int_0^l I(dx'\hat{x}') \times (B\hat{z}) = -IBl\,\hat{y}$$

Nos interesa estudiar la componente $\hat{y}'$ de la 2da ec. de Newton.

$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = (\vec{F}_g + \vec{F}_B)\cdot\hat{y}' = (-mg\hat{z} - IBl\,\hat{y})(\cos\theta\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z})$$

$$= +mg\sin\theta - IBl\cos\theta$$

La velocidad terminal se alcanza cuando $\frac{d^2y'}{dt^2} = 0$.

$$\Rightarrow mg\sin\theta = IBl\cos\theta \Rightarrow \frac{mg}{Bl}\tan\theta = I = -\frac{Bl}{R}v(t)\cos\theta$$

$$\Rightarrow |v(t)| = \frac{mgR}{(Bl)^2}\frac{\tan\theta}{\cos\theta}$$