Aux 15

P1 Biot-Savart establece que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I\, d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3},$$

es decir, el campo que genera la corriente I en la posición $\vec{r}$.

Similar al caso de Coulomb.

$\vec{r}$: vector que va desde el origen hasta el lugar donde queremos conocer/evaluar el campo.

$\vec{r}'$: vector que va desde el origen hasta dónde se encuentra la corriente

En nuestro caso, nuestro camino cerrado debe ser separado en 4:

$$\Gamma = \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\overline{AB}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{\widehat{BC}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 3}}{\overline{CD}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 4}}{\widehat{DA}}$$

¿les asignamos un número.

Trabajamos con cilíndricas, con sistema centrado en O.

① $\vec{r}_1 = 0$, $\vec{r}_1' = r\hat{r}$, $d\vec{l}_1 = dr\,\hat{r}$ $\quad r \in [R, 2R]$

② $\vec{r}_2 = 0$, $\vec{r}_2' = 2R\hat{r}$, $d\vec{l}_2 = (2R)d\varphi\,\hat{\varphi}$ $\quad \varphi \in [0, \alpha)$

③ $\vec{r}_3 = 0$, $\vec{r}_3' = r\hat{r}$, $d\vec{l}_3 = dr\,\hat{r}$ $\quad r \in [2R, R]$

④ $\vec{r}_4 = 0$, $\vec{r}_4' = R\hat{r}$, $d\vec{l}_4 = R\,d\varphi\,\hat{\varphi}$ $\quad \varphi \in [\alpha, 0)$

Notamos que en cada integral, el producto cruz actuará entre $d\vec{l}$ y $\vec{r}'$, y como los $\vec{r}_1'$ y $\vec{r}_3'$ están en la misma dirección que $d\vec{l}_1$ y $d\vec{l}_3$, el producto cruz es nulo. De esta forma, nos quedamos con

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_0^{\alpha} \frac{I\, 2R\, d\varphi\, (\hat{\varphi} \times 2R\hat{r})}{8R^3} + \int_{\alpha}^{0} \frac{I\, R\, d\varphi\, (\hat{\varphi} \times R\hat{r})}{R^3} \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{4R^2}{8R^3} \int_0^{\alpha} \hat{z}\, d\varphi - \frac{R^2}{R^3} \int_0^{\alpha} \hat{z}\, d\varphi \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\frac{4\pi}{\alpha}} \left(\frac{1}{2R} \hat{z} - \frac{1}{R} \hat{z} \right) = \frac{-\alpha \mu_0 I}{8\pi R} \hat{z}$$ → Comentar signo

Lo primero, notamos que para el cable espiral

P2) $\vec{dl} = d\vec{r}'(\theta) = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}$

$\vec{r} = 0 \quad , \vec{r}' = r\hat{r}$

recordando que $r = e^{\frac{\theta \ln 2}{2\pi}}$

Como nos interesa $\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}')$, al desarrollar el $\overset{\text{producto cruz}}{\times}$, resulta $rd\theta\hat{\theta} \times (-r\hat{r})$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\vec{dl}\times(-\vec{r}')}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\, d\theta\, \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\theta\frac{\ln 2}{2\pi}} d\theta\, \hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{-2\pi}{\ln 2}\right)\left(e^{-\theta\frac{\ln 2}{2\pi}}\right)\Big|_0^{2\pi}\hat{z} = \frac{-\mu_0 I}{2\ln 2}\left(e^{-\ln 2} - 1\right)\hat{z} = \frac{3\mu_0 I}{2\ln 2}\hat{z}$$

Para el cable recto: $\vec{r} = 0$, $\vec{r}' = x\hat{x}$, $\vec{dl} = dx\,\hat{x}$

Como $\vec{r}' \times \vec{dl} = 0$, el campo magnético que genera el cable recto es nulo.

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{3\mu_0 I}{2\ln 2}\hat{z}$$

~~Hay~~ **P3|** Hay varias formas de hacerlo

Tenemos cargas moviéndose $\Rightarrow$ hay corriente.

Una forma de encontrarla es jugando con los diferenciales.

$$dq = \sigma dS \overset{\text{cilíndricas}}{=} \sigma r\, d\varphi\, dr$$

además, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ y $\frac{dq}{dt} = I \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \sigma r \frac{d\varphi}{dt} dr = \sigma \omega r\, dr$

$$I = \sigma \omega r\, dr$$

Esto, junto con $\vec{r} = z\hat{z}$, $\vec{r}' = r\hat{r}$, $d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\varphi\,\hat{\varphi}$

Antes de integrar, vemos que $d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = (dr\,\hat{r} + r\,d\varphi\,\hat{\varphi}) \times (z\hat{z} - r\hat{r})$

se cancela

Resulta $d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \underbrace{z\,dr(-\hat{\varphi}) + rz\,d\varphi\,\hat{r}}_{\text{al integrar en } \varphi \text{ mueren.}} - r^2 d\varphi(-\hat{z})$

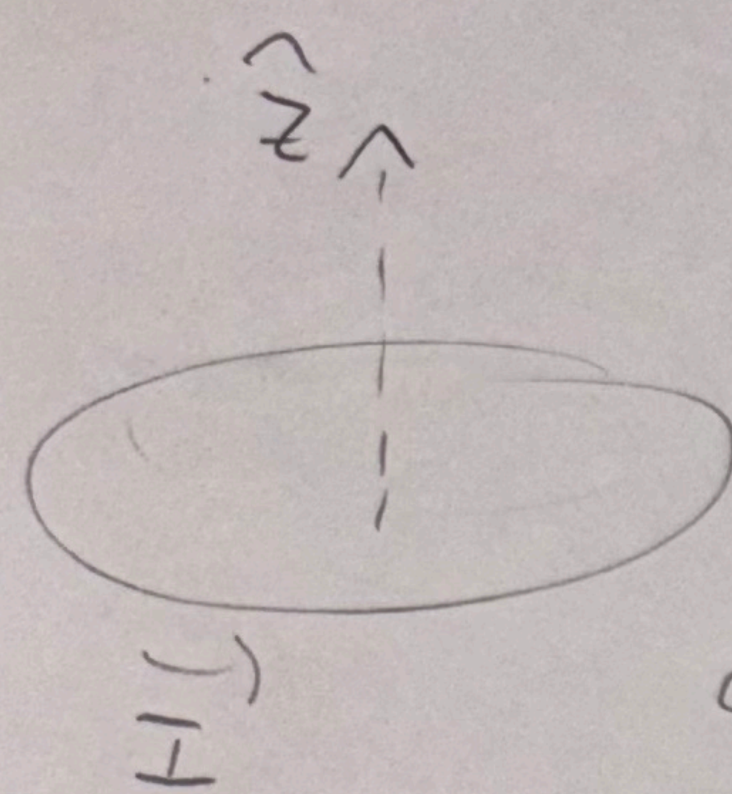
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{I r^2 d\varphi\,\hat{z}}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{r^3 d\varphi\, dr\,\hat{z}}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \frac{r^3 dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= r^2+z^2 \\ du &= 2r\,dr \\ r^3 dr &= r^2 \frac{du}{2} = \frac{(u-z^2)}{2} du \end{aligned}\right\} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{(u-z^2)\,du\,\hat{z}}{2u^{3/2}} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left\{\int_{z^2}^{z^2+R^2} u^{-1/2} du - z^2\int_{z^2}^{z^2+R^2} u^{-3/2} du\right\}\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left[\frac{1}{2}u^{1/2} + \frac{z^2}{2}u^{-1/2}\right]_{z^2}^{z^2+R^2}\hat{z}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{4}\left[(z^2+R^2)^{1/2} - |z| + \frac{z^2}{(z^2+R^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{|z|}\right]\hat{z} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{4}\left[(z^2+R^2)^{1/2} + \frac{z^2}{(z^2+R^2)^{1/2}} - 2|z|\right]\hat{z}$$

ternativa: Podemos obtener el campo $d\vec{B}$ que genera un anillo circular, y luego obtener el campo que genera un disco $\vec{B}$ con el resultado anterior.



$$\left.\begin{array}{l} \vec{r} = z\hat{z} \\ \vec{r}\,' = R\hat{r} \\ d\vec{l} = R\,d\varphi\,\hat{\varphi} \end{array}\right\} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R\,d\varphi\,\hat{\varphi}\times(z\hat{z}-R\hat{r})}{(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(z^2+R^2)^{3/2}}\left\{ z\underbrace{\int_0^{2\pi}\hat{r}\,d\varphi}_{=0} - R\int_0^{2\pi} d\varphi\,(-\hat{z})\right\}$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi(z^2+R^2)^{3/2}}\,2\pi\hat{z} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}}\,\hat{z}$$

Con esto, podemos pensar en superponer anillos con corriente circulando por ellos. Si un anillo tiene un ancho infinitesimal tenemos su corriente.

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma\,dS}{dt} = \frac{\sigma\,r\,d\varphi\,dr}{\underset{\omega}{dt}} = \sigma\omega r\,dr$$ → esta es la corriente que acarrea un anillo de ancho dr.

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}} \rightarrow \vec{B}_{dI} = \frac{\mu_0(\sigma\omega r\,dr)\,r^2}{2(z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{anillo} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \frac{r^3\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$ → ya resolvimos esto antes.