P1| Usamos esféricas recordando que al tener sólo la mitad del cascarón, $\theta \in [0, \pi/2]$.

• Centro: $\vec{r} = 0$, $\vec{r}' = R\hat{r} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = R$, $dq = \sigma dS = \sigma R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$

$$\Rightarrow \vec{E}_{centro} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{-R\hat{r}\,\sigma R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi}{R^3} = \frac{-\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \hat{r} \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

como $\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$, $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \hat{r} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, \hat{z} \, d\theta$

$$\Rightarrow \vec{E}_{centro} = \frac{-\sigma\hat{z}}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \quad , \quad \begin{matrix} \mu = \sin\theta \\ d\mu = \cos\theta \, d\theta \end{matrix} \quad \Rightarrow \vec{E}_{centro} = \frac{-\sigma\hat{z}}{2\varepsilon_0} \int_0^1 \mu \, d\mu = \frac{-\sigma\hat{z}}{4\varepsilon_0}$$

• Polo: $\vec{r} = R\hat{z}$, $\vec{r}' = R\hat{r}$, $|\vec{r} - \vec{r}'| = (2R^2(1-\cos\theta))^{1/2}$, $dq = \sigma dS = \sigma R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$

$$\vec{E}_{polo} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{R(\hat{z}-\hat{r})\,\sigma R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi}{[2R^2(1-\cos\theta)]^{3/2}} = \frac{\sigma}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{(\hat{z}-\hat{r}) \sin\theta \, d\theta \, d\phi}{(1-\cos\theta)^{3/2}}$$

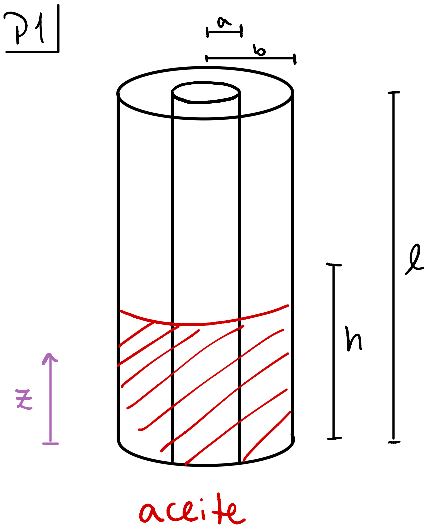
Lo único que depende de ϕ es $\hat{r}$ y $\int_0^{2\pi} \hat{r} \, d\phi = 2\pi \cos\theta \, \hat{z}$

$$\Rightarrow \vec{E}_{polo} = \frac{\sigma}{4\sqrt{2}\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{(\hat{z} - \cos\theta\,\hat{z}) \sin\theta \, d\theta}{(1-\cos\theta)^{3/2}} = \frac{\sigma\hat{z}}{4\sqrt{2}\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta \, d\theta}{(1-\cos\theta)^{1/2}} \qquad \begin{matrix} u = 1-\cos\theta \\ du = \sin\theta \, d\theta \end{matrix}$$

$$= \frac{\sigma\hat{z}}{4\sqrt{2}\varepsilon_0} \int_0^1 \frac{du}{u^{1/2}} = \frac{\sigma\hat{z}}{2\sqrt{2}\varepsilon_0}$$

Para encontrar la fuerza que siente la partícula, basta con multiplicar su carga por cada campo

P1



Este problema corresponde a un condensador con un medio dieléctrico en su interior.

Nos indican que el cilindro interior está a un potencial V, y el externo conectado a tierra. Por lo que si definimos 2 regiones según el medio, tenemos que

I) Aceite: $z \in (0, h)$ $\quad$ II) Vacío: $z \in (h, \ell)$

En ambas, la diferencia de potencial que nos importa para obtener la capacitancia es igual, por lo que podemos pensar que son dos condensadores conectados en paralelo

$$\Rightarrow C_{eq} = C_I + C_{II}$$

a)

Nos daremos una carga para cada condensador: Q_I y Q_{II}

Con el vector desplazamiento podemos encontrar el campo vectorial, relacionarlo con la diferencia de potencial y obtener cada carga

El vector de desplazamiento, lo podemos obtener con Gauss

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{f\,enc}$$ $\rightarrow$ Carga libre encerrada

Usamos un cilindro como sup. gaussiana, de largo L

$$\vec{D} = D(r)\,\hat{r} \Rightarrow \oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{z} D(r)\,\hat{r}\cdot r\,d\theta\, dz\,\hat{r} = D(r)\cdot 2\pi r z$$

$Q_{f\,enc} = \sigma \cdot 2\pi a z$, donde σ dependerá de la altura : $\dfrac{Q}{2\pi a z} \Rightarrow \sigma_I = \dfrac{Q_I}{2\pi a h}$

$$\sigma_{II} = \frac{Q_{II}}{2\pi a(\ell - h)}$$

$$\boxed{\therefore \vec{D} = \frac{\sigma \cdot a}{r}\,\hat{r}}$$

Como $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, ahora necesitamos separar según el medio

I| $\vec{E} = \dfrac{\sigma_I a}{\varepsilon r}\,\hat{r}$, donde $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_a)$ susceptibilidad del aceite, dada en el enunciado

$$\Delta V = V_0 - 0 = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \Leftrightarrow V_0 = \int_a^b \frac{\sigma_I a}{\varepsilon r}\,\hat{r}\, dr\,\hat{r} = \frac{\sigma_I a}{\varepsilon_0 \chi_a}\ln(b/a)$$

Como $\sigma_I = \dfrac{Q_I}{2\pi a z} = \dfrac{Q_I}{2\pi a(h-0)} \Rightarrow V_0 = \left(\dfrac{Q_I}{2\pi a h}\right)\dfrac{a}{\varepsilon}\ln(b/a) \Rightarrow Q_I = \dfrac{2\pi h V_0 \varepsilon}{\ln(b/a)}$

$\underline{II}|$ $\vec{E} = \frac{\sigma_{II} a}{\varepsilon_0 r}\hat{r}$; $\quad \Delta V = V_0 - 0 = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} \iff V_0 = \int_a^b \frac{\sigma_{II} a}{\varepsilon_0 r}\hat{r}\, dr\,\hat{r} = \frac{\sigma_{II} a}{\varepsilon_0}\ln(b/a)$

Como $\sigma_{II} = \frac{Q_{I}}{2\pi a z} = \frac{Q_{II}}{2\pi a(l-h)} \Rightarrow V_0 = \left(\frac{Q_{II}}{2\pi a(l-h)}\right)\frac{a}{\varepsilon_0}\ln(b/a) \Rightarrow Q_{II} = \frac{2\pi(l-h)V_0\varepsilon_0}{\ln(b/a)}$

Luego, $\quad C_{eq} = C_I + C_{II} = \left[\frac{1}{\cancel{V_0}}\left(\frac{2\pi h \cancel{V_0}\varepsilon}{\ln(b/a)}\right)\right] + \left[\frac{1}{\cancel{V_0}}\left(\frac{2\pi(l-h)\cancel{V_0}\varepsilon_0}{\ln(b/a)}\right)\right]$

$$C_{eq} = \frac{2\pi}{\ln(b/a)}\left(h\varepsilon_0(\cancel{1}+\chi_a) + (l-\cancel{h})\varepsilon_0\right) \Rightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}(h\chi_a + l)}$$

b)

En este caso, debemos encontrar las fuerzas que actúan en el aceite. Tenemos una que apunta hacia arriba (producto del trabajo de los condensadores) y una hacia abajo (peso)

$\rightarrow$ <u>Peso</u>: $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$, donde $m = \rho\cdot \text{Volumen}$, $\quad \text{Volumen} = \pi(b^2-a^2)h$

$$\Rightarrow \vec{F}_g = -\rho\pi(b^2-a^2)h\, g\hat{z}$$

$\rightarrow$ <u>Trabajo</u>: $W = \frac{1}{2}\sum_i C_i(\Delta V_i)^2$

$$W = \frac{1}{2}C_{eq}V^2 = \frac{\pi\varepsilon_0 V_0^2}{\ln(b/a)}(h\chi_a + l)$$

$$\vec{F}_w = \nabla W = \frac{\partial W}{\partial h}\hat{z} = \frac{\pi\varepsilon_0 V_0^2}{\ln(b/a)}\chi_a$$

El equilibrio se da en $\vec{F}_g + \vec{F}_w = 0$

$$\Rightarrow -\rho\pi(b-a^2)h\,g\hat{z} + \frac{\pi V_0^2\varepsilon_0}{\ln(b/a)}\chi_a = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{V_0^2\varepsilon_0\chi_a}{\rho(b^2-a^2)g\ln(b/a)}}$$

P3| Vamos por regiones.

- $r<R_1$: Es vacío, por lo que todo es nulo.

- $R_1<r<R_2$: aparentemente las cosas dependen de φ, pero de la CB $E_{1t}=E_{2t}$ podemos ver que el campo eléctrico en ambos medios es igual. Además, debido a que la diff de potencial está entre los radios $\vec{J}_i = J_i(r)\,\hat{r}$.

$$\Rightarrow \vec{J}_1 = g_1\vec{E} \quad y \quad \vec{J}_2 = g_2\vec{E}.$$

Asumiendo que no hay cargas escapando del sistema: $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{J}_i = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial(rJ_i)}{\partial r} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial(rg_iE)}{\partial r} = 0 \Rightarrow Er = C \leftarrow cte$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{C}{r}\hat{r} \quad y \quad \vec{J}_i = \frac{Cg_i}{r}\hat{r}$$

Para encontrar C, usamos la diff de potencial.

$$V_0 = \int_{R_1}^{R_2}\frac{C}{r}dr = C\ln(R_1/R_2) \Rightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{r\ln(R_1/R_2)}\hat{r} \quad y \quad \vec{J}_i = \frac{g_iV_0}{r\ln(R_1/R_2)}\hat{r}$$

Como no hay dieléctrico, $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$ y $\vec{P}=0$

- $R_2<r<R_3$: Como el condensador es neutro, todo es nulo.

- $r>R_3$: De la CB $E_{1t}=E_{2t}$, el campo eléctrico es idéntico en los 3 medios

$$\vec{D}_i = \varepsilon_i\vec{E} \Rightarrow \iint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_e = Q_0$$

$$\Rightarrow \int_0^L\int_0^{\pi}\varepsilon_1 E r\,d\varphi\,dz + \int_0^L\int_{\pi}^{3\pi/2}\varepsilon_2 E r\,d\varphi\,dz + \int_0^L\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\varepsilon_3 E r\,d\varphi\,dz = Q_0$$

$$\frac{\pi r L}{2} E(2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)=Q_0$$

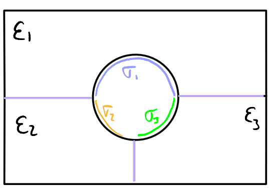
$$\vec{E}=\frac{2Q_0}{\pi r L(2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}\hat{r} \quad , \quad \vec{D}_i=\varepsilon_i \vec{E} \qquad \vec{P}_i=(\varepsilon_i-\varepsilon_0)\vec{E} \qquad \vec{J}=0$$

b) $$I=\iint \vec{J}\cdot d\vec{S}=\int_0^L\int_0^{\pi} J_1 r\,d\varphi\,dz+\int_0^L\int_{\pi}^{2\pi} J_2 r\,d\varphi\,dz=\frac{V_0\pi L}{\ln(R_1/R_2)}(g_1+g_2)$$

c) $$P=VI=\frac{V_0^2\pi L}{\ln(R_1/R_2)}(g_1+g_2)$$

d) Como $\vec{P}_i\sim\frac{1}{r}$, $-\nabla\cdot\vec{P}_i=0 \Rightarrow \rho_b=0$ en los tres medios.

Para las superficiales, notamos que $\vec{P}\sim\hat{r}$, por lo que las superficies relevantes son las que están en $r=R_3$.



$$\sigma_i=(\vec{P}_i\cdot(-\hat{r}))|_{r=R_3}=\frac{-2Q_0(\varepsilon_i-\varepsilon_0)}{\pi R_3 L(2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}$$

Las superficies moradas son perpendiculares a $\vec{P}$, por lo que $\vec{P}\cdot\hat{n}=0$

En todos los resultados con el subíndice i, $i=1,2,3$.