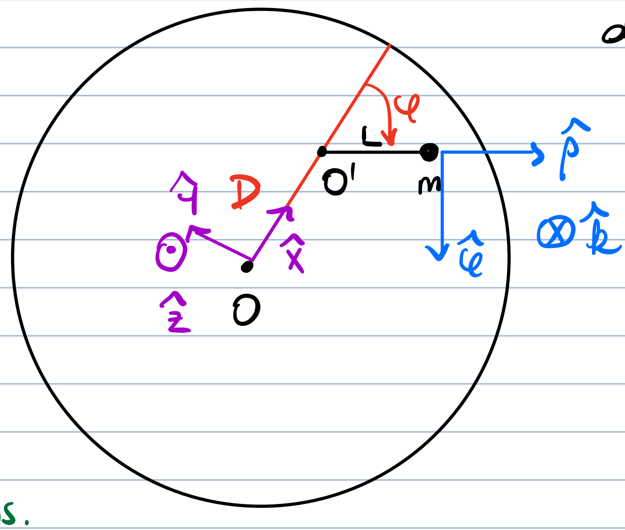
P3



• Definamos S y S' como en el dibujo:

(a) 2 ptos.

• Obtengamos $\vec{\Omega}$ y $\dot{\vec{\Omega}}$:

Por enunciado (y según S) tendremos que:

$$\boxed{\dot{\vec{\Omega}} = \ddot{\theta}\hat{z} = \alpha\hat{z}}$$

O equivalentemente: $\ddot{\theta} = \alpha$. Integrando una vez en el tiempo (considerando las C.I.):

$$\dot{\theta} = \alpha t \implies \boxed{\vec{\Omega} = \alpha t\hat{z}}$$

+0.5 $(\vec{\Omega}, \dot{\vec{\Omega}})$ (0.25, 0.25)

• Ahora, calculemos $\vec{R}$, $\dot{\vec{R}}$ y $\ddot{\vec{R}}$:

$$\boxed{\vec{R} = D\hat{x}} \; ; \; \boxed{\dot{\vec{R}} = D\dot{\theta}\hat{y} = D\alpha t\hat{y}} \; ; \; \boxed{\ddot{\vec{R}} = -D\dot{\theta}^2\hat{x} + D\ddot{\theta}\hat{y} = -D\alpha^2t^2\hat{x} + D\alpha\hat{y}}$$

+0.5 (0.1, 0.2, 0.2)

• Además, para la partícula en O' :

$$\boxed{\vec{r}\,' = L\hat{\rho}} \; ; \; \boxed{\vec{v}\,' = L\dot{\varphi}\hat{\varphi}} \; ; \; \boxed{\vec{a}\,' = -L\dot{\varphi}^2\hat{\rho} + L\ddot{\varphi}\hat{\varphi}}$$

+0.5 (0.1, 0.2, 0.2)

Además, tendremos que $\hat{z} = -\hat{k}$. Con esto, calculamos las fuerzas:

• Centrífuga:

$$-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,') = -m\vec{\Omega}\times\left(-\alpha t\hat{k}\times L\hat{\rho}\right) = m\alpha t L\vec{\Omega}\times(\hat{k}\times\hat{\rho})$$

$$= -m\alpha^2t^2L\,\hat{k}\times(\hat{k}\times\hat{\rho}) = -m\alpha^2t^2L\,\hat{k}\times\hat{\varphi} = \boxed{m\alpha^2t^2L\hat{\rho}}$$

• Coriolis: $-2m\vec{\Omega}\times\vec{v}\,' = -2m\left(-\alpha t\hat{k}\times L\dot{\varphi}\hat{\varphi}\right) = \boxed{-2mLt\alpha\dot{\varphi}\hat{\rho}}$

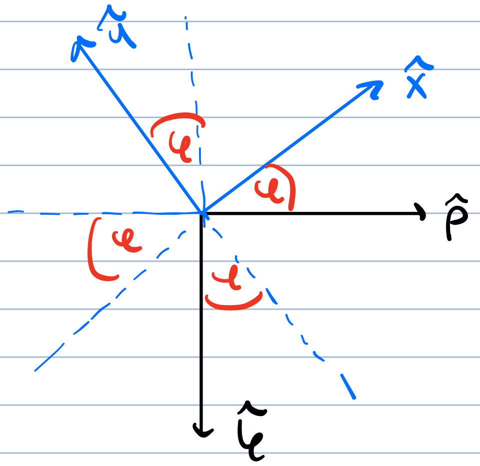
•) Transversal : $-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}\,' = -m(-\alpha\,\hat{k}\times L\hat{\rho}) = \boxed{m\alpha L\hat{\varphi}}$.

$\boxed{+0.5}$ (0.2, 0.2 y 0.1)

(b) 2 ptos.

Para escribir la ec de movto, escribamos $\ddot{\vec{R}}$ en términos de $\hat{\rho},\hat{\varphi}$:

•)



$$\boxed{\begin{aligned}\hat{x} &= \cos\varphi\,\hat{\rho} - \sin\varphi\,\hat{\varphi}\\ \hat{y} &= -\sin\varphi\,\hat{\rho} - \cos\varphi\,\hat{\varphi}\end{aligned}}$$

$\boxed{+0.5}$ (0.25, 0.25)

Así :

$\boxed{+0.5}$

$$\boxed{\ddot{\vec{R}} = -D\alpha^2t^2\hat{x} + D\alpha\hat{y} = (-D\alpha^2t^2\cos\varphi - D\alpha\sin\varphi)\hat{\rho} + (+D\alpha^2t^2\sin\varphi - D\alpha\cos\varphi)\hat{\varphi}}$$

•) Las fuerzas que actúan sobre m son :

$$\boxed{\vec{F} = mg\hat{k} - T\hat{\rho} - N\hat{k}}$$

$\boxed{+0.5}$ (0.2, 0.2, 0.1)

•) De manera que la ec. de movto será :

$$m(-L\dot{\varphi}^2\hat{\rho} + L\ddot{\varphi}\hat{\varphi}) = mg\hat{k} - T\hat{\rho} - N\hat{k} + m\alpha^2t^2L\hat{\rho} - 2mLt\alpha\dot{\varphi}\hat{\rho} + m\alpha L\hat{\varphi}$$
$$-m\,(-D\alpha^2t^2\cos\varphi - D\alpha\sin\varphi)\hat{\rho} + (+D\alpha^2t^2\sin\varphi - D\alpha\cos\varphi)\hat{\varphi}$$

Por componente :

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{\rho}:&\quad -mL\dot{\varphi}^2 = -T + mL\alpha^2t^2 - 2mLt\alpha\dot{\varphi} + mD\alpha^2t^2\cos\alpha + mD\alpha\sin\varphi\\ \hat{\varphi}:&\quad mL\ddot{\varphi} = m\alpha L - mD\alpha^2t^2\sin\varphi + mD\alpha\cos\varphi\\ \hat{k}:&\quad 0 = mg - N.\end{aligned}}$$

y $\boxed{\ddot{\varphi} = \alpha - \dfrac{D\alpha^2t^2}{L}\sin\varphi + \dfrac{D\alpha}{L}\cos\varphi}$ es la ec. pedida.

$\boxed{+0.5}$

(c) 2 ptos.

Si $D \ll L$ Entonces el segundo y tercer término son despreciables:

$$\ddot{\varphi} \sim \alpha \longrightarrow \dot{\varphi} \sim \alpha t \longrightarrow \varphi \sim \frac{\alpha t^2}{2} \quad \boxed{+1.0}$$

En este caso, se puede pensar que $D \to 0$; de manera que la masa ahora se mueve con el disco y el movimiento es puramente inercial, ya que S y S' coinciden.

$\boxed{+1.0}$