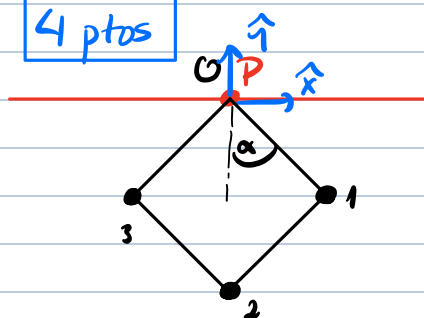


P1.2 En cartesianas: 4 pts



Con estas coordenadas y $\hat{y}$; las posiciones (y velocidades) de las partículas son:

- 1) $\vec{r}_1 = a \sin \alpha \hat{x} - a \cos \alpha \hat{y}$; $\dot{\vec{r}}_1 = a \dot{\alpha} (\cos \alpha \hat{x} + \sin \alpha \hat{y})$
- 2) $\vec{r}_2 = a (\sin \alpha - \cos \alpha) \hat{x} - a (\cos \alpha + \sin \alpha) \hat{y}$; $\dot{\vec{r}}_2 = a \dot{\alpha} [(\cos \alpha + \sin \alpha) \hat{x} - (\cos \alpha - \sin \alpha) \hat{y}]$
- 3) $\vec{r}_3 = -a \cos \alpha \hat{x} - a \sin \alpha \hat{y}$; $\dot{\vec{r}}_3 = a \dot{\alpha} (\sin \alpha \hat{x} - \cos \alpha \hat{y})$ +1.0 por $\dot{\vec{r}}_4$

y el momento angular asociado a c/partícula: $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m \dot{\vec{r}}_i$ +0.1 (det)

- 1) $\vec{L}_1 = m a^2 \dot{\alpha} \hat{z}$
 - 2) $\vec{L}_2 = 2 m a^2 \dot{\alpha} \hat{z}$
 - 3) $\vec{L}_3 = m a^2 \dot{\alpha} \hat{z}$
- } $\rightarrow \vec{L}_{\text{tot}} = 4 m a^2 \dot{\alpha} \hat{z}$ +0.9 ($\vec{L}_{\text{tot}}$)

Ahora, identifiquemos fuerzas:

- 1) +0.1

$$\vec{F}_1 = T_1 \cos \alpha \hat{y} - T_1 \sin \alpha \hat{x} - T_2 \cos \alpha \hat{x} - T_2 \sin \alpha \hat{y} - m g \hat{y}$$

$$\rightarrow \vec{F}_1 = (-T_1 \sin \alpha - T_2 \cos \alpha) \hat{x} + (T_1 \cos \alpha - T_2 \sin \alpha - m g) \hat{y}$$
 +0.1

- 2) +0.1

$$\vec{F}_2 = T_2 \cos \alpha \hat{x} + T_2 \sin \alpha \hat{y} - T_3 \sin \alpha \hat{x} + T_3 \cos \alpha \hat{y} - m g \hat{y}$$

$$\rightarrow \vec{F}_2 = (T_2 \cos \alpha - T_3 \sin \alpha) \hat{x} + (T_2 \sin \alpha + T_3 \cos \alpha - m g) \hat{y}$$
 +0.1

- 3) +0.1

$$\vec{F}_3 = T_4 \cos \alpha \hat{x} + T_4 \sin \alpha \hat{y} + T_3 \sin \alpha \hat{x} - T_3 \cos \alpha \hat{y} - m g \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_3 = (T_4 \cos \alpha + T_3 \sin \alpha) \hat{x} + (T_4 \sin \alpha - T_3 \cos \alpha - m g) \hat{y}$$
 +0.1

Si tomamos en cuenta las tensiones en el torque $\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$:

- 1) $\vec{\tau}_1 = (-T_2 a - m g a \sin \alpha) \hat{z}$
- 2) $\vec{\tau}_2 = a (T_2 - T_3 - m g (\sin \alpha - \cos \alpha)) \hat{z}$
- 3) $\vec{\tau}_3 = (T_3 a + m g a \cos \alpha) \hat{z}$

Tendremos que $\vec{\tau}_{\text{neto}}$:

$$\vec{\tau}_{\text{neto}} = 2mga(\cos\alpha - \sin\alpha)\hat{z} \quad +0.5 (\vec{\tau}_{\text{TOT}})$$

Es decir, las tensiones no aportan a la ec. de mto de α . +0.2 ($\vec{\tau}_{\text{T}}=0$)

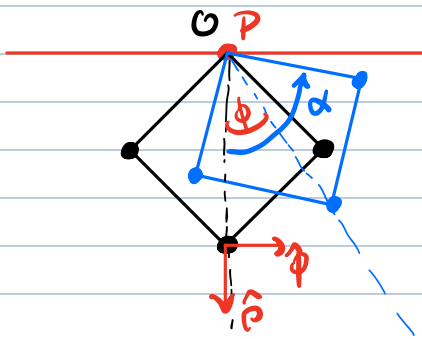
Así: $\vec{L}_{\text{TOT}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 = 4ma^2\dot{\alpha}\hat{z} \Rightarrow \dot{\vec{L}}_{\text{TOT}} = 4ma^2\ddot{\alpha}\hat{z}$

De manera que, como $\dot{\vec{L}}_{\text{TOT}} = \vec{\tau}_{\text{neto}}$: +0.2 (def)

$$4ma^2\ddot{\alpha} = 2mga(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} = \frac{g}{2a}(\cos\alpha - \sin\alpha) \quad \text{Ec. de mto.} \quad +0.5$$

Alternativa: En coord. polares: djo: se debe mayor adecuación/- las coordenadas:



la relación entre ϕ y α es:

$$\phi = \alpha - \pi/4$$

Con estas coordenadas y origen, tendremos que:

$$1) \vec{r}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a(\hat{r} + \hat{\phi}) ; \quad \dot{\vec{r}}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a\dot{\phi}(\hat{\phi} - \hat{r})$$

$$2) \vec{r}_2 = \sqrt{2}a\hat{r} ; \quad \dot{\vec{r}}_2 = \sqrt{2}a\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$3) \vec{r}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}a(\hat{r} - \hat{\phi}) ; \quad \dot{\vec{r}}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}a\dot{\phi}(\hat{\phi} + \hat{r})$$

y el momento angular:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \vec{L}_1 = ma^2\dot{\phi}\hat{z} \\ 2) \vec{L}_2 = 2ma^2\dot{\phi}\hat{z} \\ 3) \vec{L}_3 = ma^2\dot{\phi}\hat{z} \end{array} \right\} \vec{L}_{\text{TOT}} = 4ma^2\dot{\phi}\hat{z} \quad +1.0 (+0.9 + 0.1 \text{ por def})$$

Para los torques; utilizaremos que para $\vec{\tau}_{\text{neto}}$ solo aporta el peso; el que se puede descomponer como: +0.2 ↗

$$m\vec{g} = mg(\cos\phi\hat{r} - \sin\phi\hat{\phi}) \quad +0.6 (\text{con tensiones incluidas y Def})$$

Para cada partícula. Así, los torques son:

$$1) \vec{\tau}_1 = -mga \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \phi + \cos \phi) \hat{z}$$

$$2) \vec{\tau}_2 = -mga \sqrt{2} \sin \phi \hat{z}$$

$$3) \vec{\tau}_3 = mga \frac{\sqrt{2}}{2} (-\sin \phi + \cos \phi) \hat{z}$$

+0.5

Si no se consideran T pero se muestra que no aporta al torque, está ok.

De esta forma: $\dot{L}_{TOT} = \vec{\tau}_{neto}$: +0.2

$$4ma^2 \ddot{\phi} = -2mga \sqrt{2} \sin \phi$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{g \sqrt{2}}{2a} \sin \phi$$

Ahora, como $\phi = \alpha - \pi/4 \Rightarrow \ddot{\phi} = \ddot{\alpha}$

$$\sin \phi = \sin(\alpha - \pi/4) = \sin \alpha \cos \pi/4 - \cos \alpha \sin \pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha - \cos \alpha)$$

Reemplazando:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g \sqrt{2}}{2a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha - \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} = \frac{g}{2a} (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

+0.5

Que es eq. a lo anterior.

(b) Consideremos: $\ddot{\alpha} = \dot{\alpha} \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha}$; de nuevo por la ec. de moto: (2 pts) +0.1

$$\dot{\alpha} d\dot{\alpha} = \frac{g}{2a} (\cos \alpha - \sin \alpha) d\alpha$$

+0.2

Integrando:

$$\int_0^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} d\dot{\alpha} = \frac{g}{2a} \int_0^{\alpha} (\cos \alpha - \sin \alpha) d\alpha$$

C.I.

C.I.

+0.1 C.I.

$$\Rightarrow \dot{\alpha}^2 = \frac{g}{a} [\sin \alpha + \cos \alpha - 1]$$

+0.1

Para encontrar el valor de α tq la masa 2 alcance su máx rapidez:

forma 1: $\frac{\partial \dot{\alpha}^2}{\partial \alpha} = \frac{g}{a} [\cos \alpha - \sin \alpha] \stackrel{!}{=} 0$ +0.5 cond. máx

$$\Rightarrow \sin \alpha^* = \cos \alpha^* \Leftrightarrow \alpha^* = \pi/4$$
 +0.5 soln.

forma 2: Intuición + explicación: $\alpha^* = \pi/4$. (depués de argumento).
+1.0 +0.5.

Reemplazando en $\dot{\alpha}^2$:

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{g}{a} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right] = \frac{g}{a} (\sqrt{2} - 1)$$
 +0.2

reemplazando en $\dot{\vec{r}}_2$:

$$\dot{\vec{r}}_2^* = \sqrt{2} a \left[\frac{g}{a} (\sqrt{2} - 1) \right]^{1/2} \hat{\alpha} = \left[2ag(\sqrt{2} - 1) \right]^{1/2} \hat{\alpha}$$
 +0.3

O bien:

$$\dot{\vec{r}}_2^* = a \left[\frac{g}{a} (\sqrt{2} - 1) \right]^{1/2} [\sqrt{2} \hat{x}]$$
$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_2^* = \left[2ag(\sqrt{2} - 1) \right]^{1/2} \hat{x}$$

Notar que ambas descripciones son equivalentes pues cuando $\alpha = \pi/4$, $\hat{\alpha} = \hat{x}$.

