Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001-2 – Mecánica

Auxiliar #23 Mecánica Lagrangiana II

Profesor: Claudio Romero
Auxiliares: Rodrigo Catalán, Daryl Clerc, José Mondaca
Ayudante: Marcelo Guaquel

P1 Fuerzas de ligadura en Sistemas conocidos.

En esta pregunta vamos a aplicar el formalismo de Euler-Lagrange para calcular las ecuaciones de movimiento de: **i)** Péndulo Simple. **ii)**Maquina de Atwood. Puede ver ambos sistemas en las figuras 1 y 2 respectivamente.

i) Péndulo Simple.

- **a)** Escriba el lagrangiano sin restricciones. Luego agregue las restricciones del problema.
- **b)** Construya el Lagrangiano con restricciones y determine las ecuaciones de movimiento.
- **c)** Determine la o las fuerzas generalizadas.

ii) Máquina de Atwood (Propuesto)

- **a)** Escriba el lagrangiano sin restricciones. Luego agregue las restricciones del problema.
- **b)** Construya el Lagrangiano con restricciones y determine las ecuaciones de movimiento.
- **c)** Determine la o las fuerzas generalizadas.

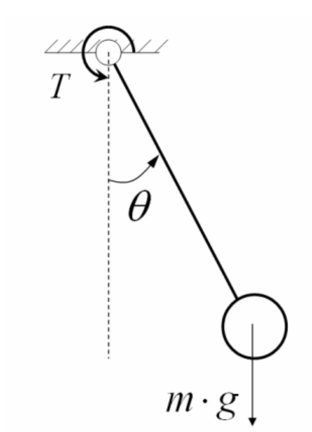

Figura 1: Péndulo Simple

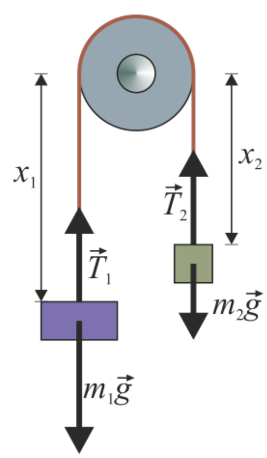

Figura 2: Atwood Machine

P2 Partícula sobre un Aro

Una partícula de masa m está en la parte mas alta de un aro de radio R. Un pequeño viento la saca de su posición de equilibrio y comienza a resbalar sobre el aro.[Figura 3]

a) Construya el Lagrangiano utilizando multiplicadores de Lagrange y obtenga las ecuaciones de movimiento.

b) Demuestre que si la partícula partió desde el reposo, se separa del aro en θ^* tal que:

$$\cos\theta^* = \frac{2}{3}$$

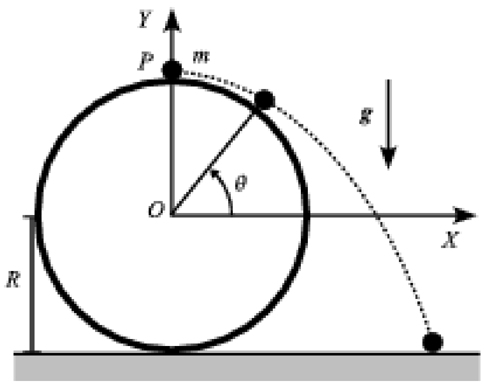

Figura 3: Partícula sobre Aro

P3 Cilindro sobre plano inclinado

En esta pregunta se estudia la dinámica de un cilindro rodando sin deslizamiento por un plano inclinado con ángulo ϕ como lo muestra la figura 4.

a) Para esta geometría, escriba el lagrangiano sin restricciones. Luego, agregue las restricciones del problema. Use las variables (x, θ).

b) Construya el lagrangiano con restricciones y obtenga las ecuaciones de movimiento.

c) Determine la fuerza generalizada del problema. Interprete lo que representa esta fuerza. ¿Por qué no obtuvo la fuerza normal en su cálculo?.

d) Obtenga $\ddot{x}$ y $\ddot{\theta}$. Compare con el caso en que no se impone la condición de no deslizamiento. ¿Le hace sentido su resultado?. Argumente.

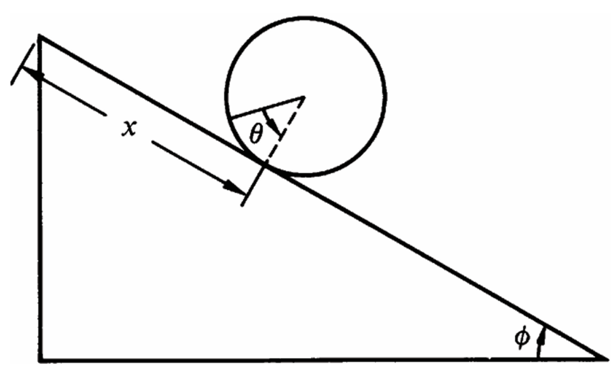

Figura 4: Cilindro en plano inclinado

Resumen

Euler-Lagrange : Sistemas Mecánicos

Para un sistema mecánico, el lagrangiano viene dado por:

$$L = K - U \tag{1}$$

Donde K es la energía cinética y U la energía potencial.

Suponiendo que $L = L(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n)$ Uno puede obtener las ecuaciones de movimiento del sistema con las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0} \tag{2}$$

Multiplicadores de Lagrange: Sistemas Mecánicos

Note que en las ecuaciones de movimiento obtenidas con Lagrange, no aparecen las fuerzas de restricción (tensión, normal, roce, etc). Para dar cuenta de estas fuerzas, necesitamos utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange.

Si las restricciones holonómicas f_α son del tipo:

$$f_\alpha(q_1, q_2, ..., q_n) = 0 \tag{3}$$

Podemos construir un nuevo Lagrangiano:

$$\boxed{L = L_{sr} + \sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha} \tag{4}$$

Donde L_{sr} es el Lagrangiano sin restricciones. Note que si consideramos λ_α como una variable y calculamos su ecuación con Euler-Lagrange. Obtendremos las reestricciones holonómicas (3). Luego, podemos asociar los multiplicadores de Lagrange a las fuerzas generalizadas.

Alternativamente, podemos encontrar las fuerzas de restricción aplicando la ecuación 5.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{sr}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L_{sr}}{\partial q_i} = Q_i} \tag{5}$$

Donde Q_i son fuerzas generalizadas.

$$Q_i = \sum_\alpha^m \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \tag{6}$$