Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001-2 – Mecánica

Auxiliar #22 Mecánica Lagrangiana

Profesor: Claudio Romero
Auxiliares: Rodrigo Catalán, Daryl Clerc, José Mondaca
Ayudante: Marcelo Guaquel

P1 Conservación Energía

Para lo siguiente, considere un Lagrangiano de la forma $L = L(t, q_1, q_2, ...q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n)$

a) Demuestre que la cantidad H, definida como:

$$H \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

Es una cantidad conservada cuando L no depende explícitamente del tiempo.

b) (**Propuesto**) Considerando que la energía cinética es cuadrática con las velocidades:

$$T = \sum_i c_i \dot{q}_i^2$$

(Comunmente $c_i = m_i/2$) y que la energía potencial U no depende de los $\dot{q}_i$. Obtenga una expresión para H e interprete.

P2 Péndulo Esférico

Un péndulo esférico, a diferencia de un péndulo simple, no se mueve en un plano, sino que en el espacio. Para el sistema mencionado (descrito en la figura 1) encuentre:

a) El lagrangiano que describe el sistema.

b) Las ecuaciones de movimiento del sistema y sus cantidades conservadas. ¿Qué recupera con $\phi = \phi_0$? Interprete.

c) Obtenga una ecuación diferencial con dependencia solamente de la variable θ.

d) Encuentre H y verifique que en este sistema si se cumple que $H = E$ con E la energía del sistema. Con esto, reduzca el problema al de una partícula ficticia en un potencial efectivo $U_{eff}(\theta)$.

e) (**Propuesto**)Obtenga una ecuación que nos entregue el punto de equilibrio θ_0. Luego realice pequeñas oscilaciones en torno a este punto. Calcule la frecuencia de pequeñas oscilaciones.

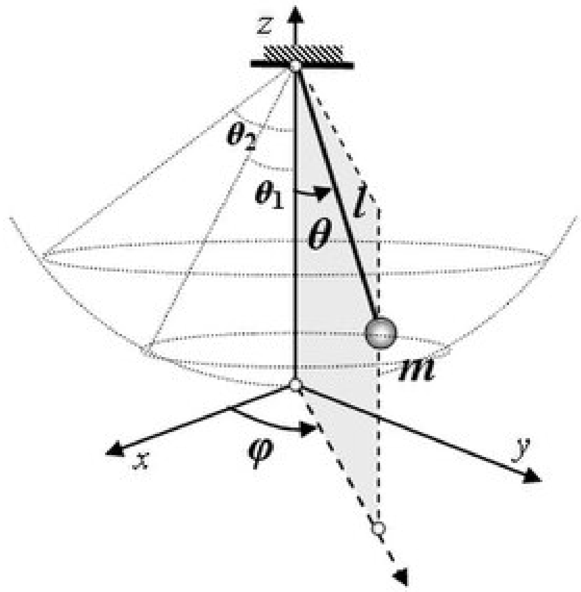

Figura 1: Péndulo Esférico

Hint: Le puede ser útil que en esféricas el vector velocidad viene dado por:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

P3 Lagrangiano No Autónomo

El lagrangiano de un sistema unidimensional es:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 - kx^2\right)e^{\gamma t}$$

Para este lagrangiano:

a) Encuentre las ecuaciones de movimiento.¿Qué sistema representa este lagrangiano?.

b) ¿Se conserva el momentum lineal?¿Por qué?

c) ¿Se conserva el hamiltoniano H?.¿Se cumple que E=H?. Calcule E(energia) explícitamente como K+U.

d) Incluso en sistemas dependientes explícitamente del tiempo (no-autónomos), se pueden encontrar cantidades conservadas. Muestre que la cantidad

$$C(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 + kx^2 + m\gamma x\dot{x}\right)e^{\gamma t}$$

Es una cantidad conservada. Interprete que significa $C(x, \dot{x}, t)$. ¿Qué pasa con $C(x, \dot{x}, t)$ si $t \to \infty$?

e) **(Propuesto)** ¿La cantidad $C(x, \dot{x}, t)$, sigue siendo conservada para un potencial U(x) arbitrario?

Resumen

Euler-Lagrange : Sistemas Mecánicos

Para un sistema mecánico, el lagrangiano viene dado por:

$$L = K - U \tag{1}$$

Donde K es la energía cinética y U la energía potencial.

Suponiendo que $L = L(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n)$ Uno puede obtener las ecuaciones de movimiento del sistema con las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0} \tag{2}$$

Momento Canónico

Se definen los momentos canónicos /momentos generalizados como:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i \tag{3}$$

Notemos que si el lagrangiano no depende explícitamente de q_i, se tendrá que:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv p_i = Cte \tag{4}$$

Lo anterior indica que hay una cantidad conservada p_i. Siempre que hay una cantidad conservada es debido a una simetria del problema (Teorema de Noether).

Hamiltoniano

Si el sistema depende de las coordenadas $(q_1, q_2, ..q_n)$. Se define la cantidad llamada Hamiltoniano como:

$$H \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \tag{5}$$

Esta cantidad cumple con ciertas propiedades:

i) Si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, H será una constante de movimiento:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt} H = 0 \tag{6}$$

Donde la simetria asociada a esta cantidad conservada es la invarianza temporal.

ii) Si solo hay potenciales independientes del tiempo $V = V(q_1, q_2, ..., q_N)$ y restricciones independientes del tiempo. El hamiltoniano no es tan solo una constante de movimiento sino que también la energía

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial x_i}{\partial t} = 0 \Longrightarrow H = T + V = E \tag{7}$$