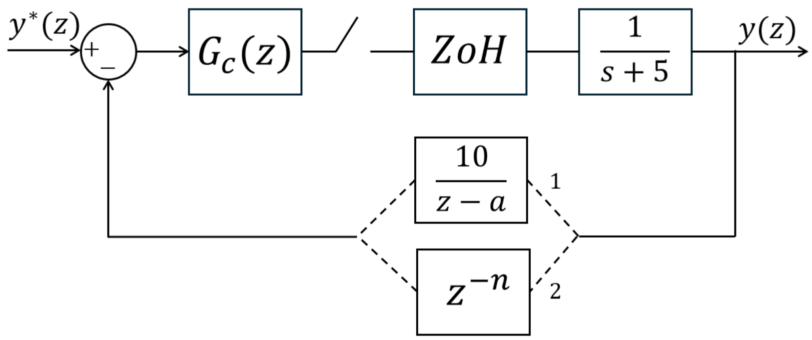
**Fundamentos de control de sistemas** (EL4111-1)
**Pauta control 2**
Prof. Roberto Cardenas Dobson
Prof. Aux. Osvaldo Jimenez - Erik Sáez
Ayudantes. Simon Arenas- Juan Pablo Baez - Francisco Garces - Sofia Ibarra

1. Se tiene el siguiente sistema de control digital: En el lazo de retroalimentación se tiene un sistema




inalámbrico de transmisión de datos que, dependiendo de las condiciones atmosféricas, puede introducir un retardo de $n$ muestras en el sistema de control (estado 2). Para efectos de diseño, se desea que la respuesta del sistema de control a diseñar cumpla con los requerimientos de coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0.8$ y de una frecuencia natural de $\omega_n = 60[rad/s]$. La frecuencia de muestreo es de $\omega_s = 15\omega_n$. Utilizando la transformada exacta de $Z$, se le pide resolver las siguientes preguntas.

1. Implemente un controlador proporcional de la forma $G(z) = K$. Considere que, operando en el estado 1, existe la posibilidad de cambiar el valor del polo del lazo de retroalimentación del sistema de transmisión de datos ¿Qué condición debe cumplir $a$ para que el sistema pueda alcanzar los requerimientos de diseño con este controlador? Utilice LGR para encontrar el valor de $a$ y de $K$. (15/100)
2. ¿Existe la posibilidad de que el sistema se haga inestable para algún valor de $K$? De ser así, encuentre el valor de $K$ del controlador de a) que produce inestabilidad. (15/100)
3. Considere ahora que el sistema inálamabrico de transmisión de datos está operando en el estado 2, con $n = 1$. Diseñe un controlador que permita cumplir las especificaciones originales y alcanzar cero error en estado estacionario a entrada escalón (15/100).

**Solución:**

## Resolucion (1.1)

Dado que inicialmente se esta operando en el estado 1, lo primero a realizar sera aplicar la transformada Z exacta al sistema, considerando el ZoH

$$\begin{aligned} Z_{planta}(z) &= Z\left\{\frac{1-e^{sT}}{s}\cdot\frac{1}{s+5}\right\} && (1)\\ &= \frac{z-1}{z}\cdot Z\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+5}\right\} && (2)\\ &= \frac{z-1}{5z}\cdot Z\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+5}\right\} && (3)\\ &= \frac{z-1}{5z}\cdot\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-5T}}\right) && (4)\\ &= \frac{0.00685}{z-0.9657} && (5) \end{aligned}$$

4 ptos

Esto considerando que el tiempo de muestreo viene dado por:

$$T_s = \frac{2\pi}{15\cdot w_n} = 0.00698 \tag{6}$$

1 pto

Con esto tenemos que la funcion a lazo abierto corresponde a tanto el lazo de retroalimentación como a la planta discretizada, es decir:

$$G(z)\cdot H(z) = K\cdot\frac{0.0685}{(z-0.9657)(z-a)} \tag{7}$$

1 pto

Teniendo los valores de ambos polos y conociendo el valores de $\xi$ y $\omega_n$, se tiene que que el punto de diseño en Z sera:

$$\begin{aligned} Z^*_{1,2} &= e^{T_s(-0.8\cdot 60\pm j60\sqrt{1-(0.8)^2})} && (8)\\ &= 0.6929\pm j0.1778 && (9) \end{aligned}$$

1 pto

Con lo que el LGR vendra dado por lo siguiente:

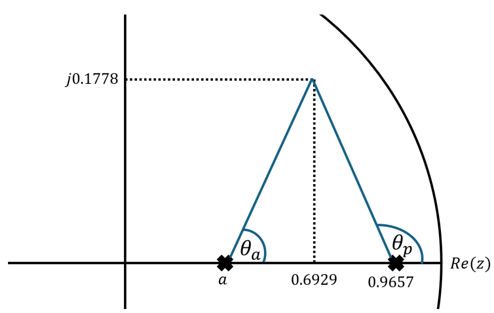



Figura 1: LGR del sistema de lazo cerrado

Se tendra por tanto que:

$$\theta_p = 180^\circ - tan^{-1}\left(\frac{0.1778}{0.9657-0.6929}\right) = 146.91^\circ \tag{10}$$

+1 pto

$$\theta_a = tan^{-1}\left(\frac{0.1778}{0.6929-a}\right) \tag{11}$$

+1 pto

Por condicion de angulo tenemos que:

$$\theta_a = 180° - \theta_p = 33.09° \tag{12}$$

+ 1 pto

Se obtiene por tanto el valor de a como:

$$tan(33.09°) = \frac{0.1778}{0.6929 - a} \tag{13}$$

$$a = 0.42005 \tag{14}$$

2 ptos

Lo anterior puede verificarse debido a la forma conocida del LGR, en la que se debera cumplior que la distancia de **a** a la parte real del punto de diseño sea igual a la distancia de la parte real del polo a la parte real del punto de diseño.Luego calculamos la ganancia que es necesaria, obteniendose lo siguiente:

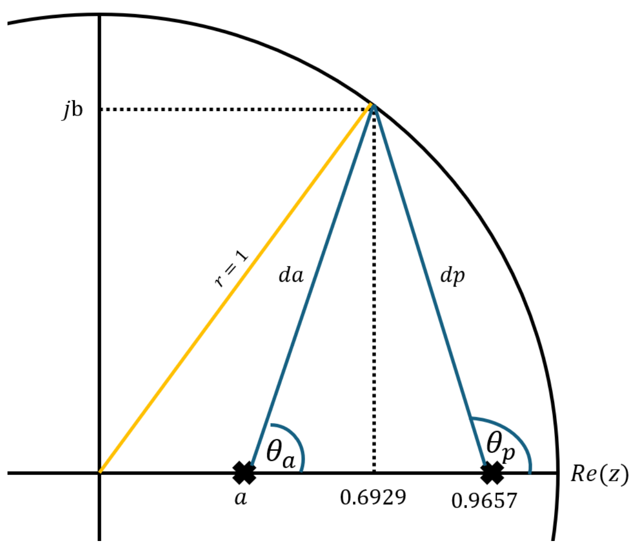
$$K = \left| \frac{1}{\frac{0.0685}{(z-0.9657)(z-0.42)}} \right|_{z=z*} \tag{15}$$

$$= 1.5483 \tag{16}$$

3 ptos

## Resolucion (1.2)

Se busca analizar la inestabilidad del sistema, dada la forma del LGR, tendremos que este divergera unicamente en la vertical, por lo tanto se tendra que el sistema sera criticamente estable cuando se intersecte la circunferencia unitaria, se visualiza de la siguiente manera:




+ 2 ptos

Figura 2: LGR del sistema de lazo cerrado

Se tendra que la distancia horizontal **b** a la que sera criticamente estable corresponde a:

$$b = \sqrt{1 - 0.6929^2} = 0.721 \tag{17}$$

4 ptos

Con lo que la ganancia del sistema vendra dada por lo siguiente:

$$K_{sys} = \frac{\prod \text{Distancia polos}}{\prod \text{Distancia ceros}} \tag{18}$$

+ 1 pto

De esta manera dado que no existen ceros, este valdra 1. Por tanto tenemos que:

$$K_{sys} = \frac{da \cdot dp}{1} \tag{19}$$

$$= \frac{\sqrt{0.2728^2 + 0.72103^2} \cdot \sqrt{0.2728^2 + 0.72103^2}}{1} \tag{20}$$

$$= 0.5928 \tag{21}$$

4 ptos

Pero tenemos que tener en cuenta que este es el $k_{sys}$ es del sistema por lo que:

$$K_{sys} = 0.5928 \tag{22}$$

$$= K \cdot 0.0685 \tag{23}$$

$$K = 8.654 \tag{24}$$

4 ptos

De esta manera se obtiene el valor de k critico para el cual el sistema es inestable

## Resolucion (1.3)

Dado que el sistema ahora opera en el estado 2 y ademas tiene un retardo de 1 muestra (n = 1), luego tendremo que el controlador propuesto sera tal que:

$$G_c(z) = K \cdot \frac{(z-a)}{z-1} \tag{25}$$

+ 1 pto

Con lo que se tiene que el sistema a lazo abierto vendra dado por:

$$G(z) \cdot H(z) = K \cdot \frac{(z-a)}{z-1} \cdot \frac{0.00685}{(z-0.9657)} \cdot \frac{1}{z} \tag{26}$$

3 ptos

Con lo que tenemos que el LGR vendra dado por:

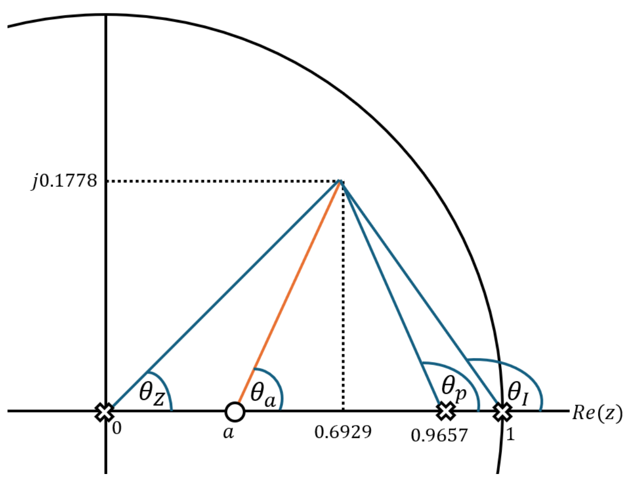



Figura 3: LGR del sistema de lazo cerrado

De esta manera se tendra que por condicion de angulo:

$$\theta_I + \theta_P + \theta_z - \theta_a = 180^\circ \tag{27}$$

+ 1 pto

Donde se tiene que:

$$\theta_I = 180^\circ - tan^{-1}\left(\frac{0.1778}{1-0.6929}\right) = 149.93^\circ \quad +1 \text{ pto} \tag{28}$$

$$\theta_P = 180^\circ - tan^{-1}\left(\frac{0.1778}{0.9657-0.6929}\right) = 146.91^\circ \quad +1 \text{ pto} \tag{29}$$

$$\theta_z = tan^{-1}\left(\frac{0.1778}{0.6929}\right) = 14.39^\circ \quad +1 \text{ pto} \tag{30}$$

$$\theta_a = tan^{-1}\left(\frac{0.1778}{0.6929-a}\right) \quad +1 \text{ pto} \tag{31}$$

De esta manera se obtiene que:

$$\theta_a = \theta_I + \theta_P + \theta_z - 180^\circ = 131.23^\circ \tag{32}$$

Con lo que finalmente:

$$tan(\theta_a) = \frac{0.1778}{0.6929-a} \tag{33}$$

$$a = \boxed{0.8487} \tag{34}$$

+2 ptos

Con lo que la ganancia sera:

$$K = \left|\frac{1}{\frac{(z-\boxed{0.8487})\cdot \boxed{0.00685}}{(z-1)(z-0.9657)z}}\right|_{z=z^*} = \boxed{51.044} \tag{35}$$

+3 ptos

De esta manera se tendra que el controlador sera de la forma:

$$G_c(z) = \boxed{51.044} \cdot \frac{(z-\boxed{0.8487})}{z-1} \quad +1 \text{ pto} \tag{36}$$