Electromagnetismo Aplicado (EL3103)
Control 2
Prof. Tomás Cassanelli
Prof. Gonzalo Narváez
Ayudantes: Bruno Pollarolo - Joaquín Díaz

Tiempo: 10:15–12:15 hrs. Primavera 2024 Puntos: 40

Nombre:

Responda una pregunta **por hoja**. Favor **no olvidar** escribir su nombre. Para cantidades vectoriales (usualmente definidas como **A** en clase), favor usar flecha $\vec{A}$ para indicar que son vectores y sin flecha para escalares $A \equiv \|\vec{A}\|$, y para matrices $[A]$ usar corchetes.

1. Preguntas de contenido:
   (a) [2 puntos] ¿A qué se debe que un material posea dos constantes de refracción n? Explique con un diagrama.
   (b) [1 puntos] ¿Qué es causalidad?
   (c) [2 puntos] Explique qué es el fenómeno de dispersión y de ejemplos en qué medios ocurre en longitudes de onda óptica y de radio.
   (d) [2 puntos] ¿Qué entendemos por permitividad compleja?
   (e) [2 puntos] Explique el concepto de largo eléctrico y en qué ordenes y teoría es importante su consideración.
   (f) [1 puntos] Se tiene una radio antena de 3 m operando a un rango de radio frecuencias (o *passband*) de 800–1200 MHz. Determine entonces el *beamwidth* en grados de la radio antena (asuma propagación en el vacío).
   (g) [2 puntos bonus] Sean las tres cantidades:

$$x = 10{,}0 \pm 0{,}2, \qquad y = 7{,}0 \pm 0{,}1, \qquad z = 9{,}010 \pm 0{,}005 \tag{1}$$

   que se requiere calcular: $h = x + y - z$, entonces ¿Cuál es el error asociado de h?
   (h) [2 puntos bonus] Mencione 7 propiedades fundamentales de radio antenas.

Solución:

(a) La constante de refracción se origina por la estructura cristalina del material. Si el material es anisotrópico, es decir, propiedades en cierta dirección son diferentes que en otra, entonces la luz (no polarizada, e.g., como la del sol), puede ser refractada en distintos componentes (separando su polarización) dependiendo de como interactúa con un mismo material, dando así origen a la figura 1.

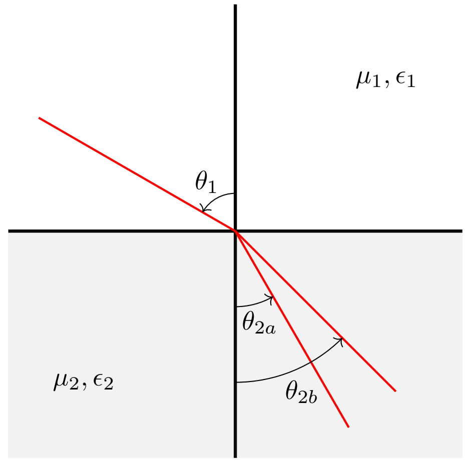

Figura 1: Efecto de birrifringencia de un material altamente asnisotrópico.

Esto implica que se tendrán dos posibles leyes de Snell:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_{2a} \sin\theta_{2a}, \qquad n_1 \sin\theta_1 = n_{2b} \sin\theta_{2b}. \tag{2}$$

Es decir, el material es anisotrópico, i.e.,

$$[\mu_2] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} \end{bmatrix}, \qquad [\epsilon_2] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

(b) La causalidad es la velocidad finita de propagación de la información. Esto implica que la respuesta de un sistema a una entrada no puede ser instantánea, sino que debe tomar un tiempo finito en responder. La velocidad máxima a la que esto ocurre es la velocidad de la luz en el vacío, $u_0 \equiv c$.

(c) La dispersión es la diferenciación de velocidades de algún frente de ondas propagándose en un material. Es decir, $n(\lambda)$. Esto ocurre en un prisma en longitudes de onda óptica y en la ionosfera en longitudes de onda de radio.

(d) La permitividad compleja agrega a la permitividad (real) pérdidas por calor causadas por *damping* en el material,

$$\epsilon = \epsilon' + \mathrm{j}\epsilon''. \tag{4}$$

Donde ϵ'' es llamada *dielectric damping* o el amortiguamiento realizado por el dieléctrico y que se disipa en energía térmica.

(e) El largo eléctrico es

$$\text{largo eléctrico} \equiv \frac{\ell}{\lambda} = \frac{\ell\nu}{u_{\mathrm{ph}}}, \qquad \text{con } u_{\mathrm{ph}} \text{ la velocidad de fase.} \tag{5}$$

Con ℓ el largo físico de algún material al cual medimos sus propiedades. Es importante en teoría de microondas cuando $\ell \approx \lambda$, cuando efectos de la propagación de ondas y cambios de fase ya no pueden ser ignorados.

(f) Se tiene que $D_{\mathrm{p}} = 3\,\mathrm{m}$ y $\nu = 800$–$1200\,\mathrm{MHz}$, luego:

$$\mathrm{BW}_{\nu} = 1{,}22\,\mathrm{rad} \times \frac{\lambda}{D_{\mathrm{p}}} = 1{,}22\,\mathrm{rad} \times \frac{u_0/\nu}{D_{\mathrm{p}}}, \tag{6}$$

$$\mathrm{BW}_{1{,}2\,\mathrm{GHz}} = 1{,}22\,\mathrm{rad} \times \frac{\frac{299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{1200\,\mathrm{MHz}}}{3\,\mathrm{m}} = 5{,}8^{\circ}, \tag{7}$$

$$\mathrm{BW}_{0{,}8\,\mathrm{GHz}} = 1{,}22\,\mathrm{rad} \times \frac{\frac{299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{800\,\mathrm{MHz}}}{3\,\mathrm{m}} = 8{,}7^{\circ}. \tag{8}$$

(g) El error es simplemente:

$$\delta h = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}1^2 + 0{,}005^2} \approx 0.22. \tag{9}$$

(h) Patrón de radiación, *directivity*, ganancia, polarización, impedancia, ancho de banda, y *scanning*.

2. Deducción de la expresión para adaptación de cargas. Considerando el esquema general de la figura 6, donde se tiene un generador operando a una única frecuencia, una línea de transmisión con perdidas y una carga estándar desconocida $Z_{\mathcal{L}}$, se le pide obtener la expresión para la impedancia vista hacia la carga desde cualquier punto en la línea.

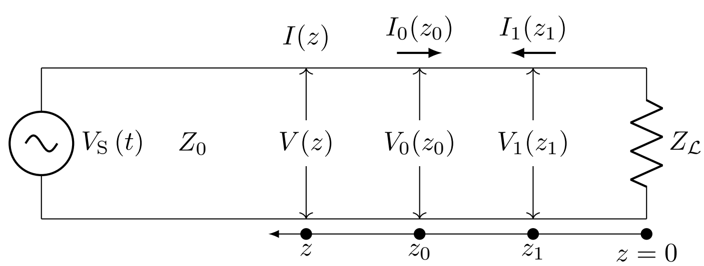

Figura 2: Esquema general de línea de transmisión de pregunta 2. Nótese que la dimensión en $\widehat{\mathbf{z}}$ es $-\mathcal{L} < z < 0$.

(a) [3 puntos] Obtenga las expresiones básicas fasoriales de la tensión y la corriente para cualquier punto en z usando las ondas incidentes y reflejadas debido a la carga. *Hint:* Incorpore en sus expresiones una diferencia de fase arbitraria entre tensión y corriente, δ, y un desplazamiento de fase en la onda reflejada por efecto de la carga, ξ.

(b) [3 puntos] Exprese la razón entre las tensiones incidentes y reflejadas, V_1/V_0, en función de la impedancia de la línea y la carga. Se le pide la razón en $z = 0$. Repita el proceso para la razón entre corrientes (puede hacerlo por analogía si esta seguro de la relación).

(c) [4 puntos] Utilice lo obtenido en las partes anteriores para demostrar que la impedancia de entrada viene dada por:

$$Z_{\mathrm{in}} = Z_0 \frac{Z_{\mathcal{L}} + Z_0 \tanh(\gamma z)}{Z_0 + Z_{\mathcal{L}} \tanh(\gamma z)}, \quad -\mathcal{L} < z < 0. \tag{10}$$

Solución:

(a) Primero definimos las expresiones básicas para las ondas incidentes en un medio con perdidas:

$$V_0 = \|V_0\|\, \mathrm{e}^{\gamma z}, \tag{11}$$

$$I_0 = \|I_0\|\, \mathrm{e}^{\gamma z - \mathrm{j}\delta}. \tag{12}$$

Donde $\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta$ es la constante de propagación de la onda y δ el típico desfase entre corriente y tensión para medios parcial o totalmente inductivos o capacitivos. Para la señal reflejada se tiene que:

$$V_1 = \|V_1\|\, \mathrm{e}^{\gamma z - \mathrm{j}\xi} \tag{13}$$

$$I_1 = \|I_1\|\, \mathrm{e}^{\gamma z - \mathrm{j}\delta - \mathrm{j}\xi} \tag{14}$$

Donde ξ es el corrimiento en fase de la onda reflejada respecto a la incidente debido a la carga. Con ello podemos usar el principio de superposición para establecer una expresión general de la tensión y corriente:

$$V = V_0 + V_1 = \|V_0\| \left(\mathrm{e}^{\gamma z} + \frac{\|V_1\|}{\|V_0\|} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\xi} \mathrm{e}^{-\gamma z} \right), \tag{15}$$

$$I = I_0 + I_1 = \|I_0\| \left(\mathrm{e}^{\gamma z} + \frac{\|I_1\|}{\|I_0\|} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\xi} \mathrm{e}^{-\gamma z} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta}. \tag{16}$$

(b) Con el fin de expresar lo pedido en función de las impedancias simplemente nos adherimos a las definiciones. Sabemos por definición que la impedancia característica de la línea cumple la siguiente relación $Z_0 = \frac{V_0}{I_0}$:

$$\Rightarrow Z_0 = \frac{\|V_0\|}{\|I_0\|} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta} \quad \wedge \quad I_0 = \frac{V_0}{Z_0}. \tag{17}$$

Mientras que para una onda que viaja en el sentido contrario sobre el mismo eje de referencia se tiene $Z_0 = -\frac{V_1}{I_1}$:

$$\Rightarrow Z_0 = -\frac{\|V_1\|}{\|I_1\|} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta} \quad \wedge \quad I_1 = -\frac{V_1}{Z_0}. \tag{18}$$

Ahora para la impedancia en la carga también usamos la definición. Sabemos que la razón entra la tensión total y la corriente total en el punto donde esta la carga es, por definición, la impedancia de la misma, en nuestro caso en $x = 0$, luego $Z_{\mathcal{L}} = \frac{V(z=0)}{I(z=0)}$:

$$\Rightarrow I(z=0) = \frac{V(z=0)}{Z_{\mathcal{L}}}, \tag{19}$$

$$\Rightarrow I_0(z=0) + I_1(z=0) = \frac{V_0(z=0) + V_1(z=0)}{Z_{\mathcal{L}}}, \tag{20}$$

$$\Rightarrow \frac{V_0(z=0)}{Z_0} - \frac{V_1(z=0)}{Z_0} = \frac{V_0(z=0) + V_1(z=0)}{Z_{\mathcal{L}}}. \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

Antes de proseguir hemos de evaluar en $z = 0$ en cada función de z:

$$V_0(z=0) = \|V_0\|, \tag{23}$$
$$V_1(z=0) = \|V_1\| e^{j\xi}. \tag{24}$$

Por lo que podemos remplazar en lo que habíamos desarrollado y obtener:

$$\frac{\|V_0\| - \|V_1\| e^{j\xi}}{Z_0} = \frac{\|V_0\| + \|V_1\| e^{j\xi}}{Z_{\mathcal{L}}} \tag{25}$$

Despejando para V_1/V_0 se obtiene:

$$\frac{V_1(z=0)}{V_0(z=0)} = \frac{\|V_1\| e^{j\xi}}{\|V_0\|} = \frac{Z_{\mathcal{L}} - Z_0}{Z_{\mathcal{L}} + Z_0} = \widehat{R}_V \tag{26}$$

Donde llamamos a $\widehat{R}_V$ es nuestro coeficiente de reflexión para la tensión. Bajo un proceso análogo se obtiene el coeficiente de reflexión para la corriente:

$$\frac{I_1(z=0)}{I_0(z=0)} = \frac{\|I_1\| e^{j\xi}}{\|I_0\|} = -\frac{Z_{\mathcal{L}} - Z_0}{Z_{\mathcal{L}} + Z_0} = \widehat{R}_I \tag{27}$$

Notamos que los coeficientes están desfasados 180° en el plano complejo, pero tienen el mismo modulo.

(c) La impedancia de entrada vista desde cualquier punto es, por definición:

$$Z_{\text{in}}(z) = \frac{V}{I}. \tag{28}$$

Empezamos el desarrollo con las expresiones obtenidas en la parte (a):

$$Z_{\text{in}}(z) = \frac{\|V_0\| \left(e^{\gamma z} + \frac{\|V_1\|}{\|V_0\|} e^{j\xi} e^{-\gamma z} \right)}{\|I_0\| \left(e^{\gamma z} + \frac{\|I_1\|}{\|I_0\|} e^{j\xi} e^{-\gamma z} \right) e^{-j\delta}}. \tag{29}$$

Reordenando y usando las expresiones obtenidas anteriormente para los coeficientes de reflexión e impedancia característica:

$$Z_{\text{in}}(z) = Z_0 \frac{e^{\gamma z} + \frac{Z_{\mathcal{L}} - Z_0}{Z_{\mathcal{L}} + Z_0} e^{-\gamma z}}{e^{\gamma z} - \frac{Z_{\mathcal{L}} - Z_0}{Z_{\mathcal{L}} + Z_0} e^{-\gamma z}} = Z_0 \frac{Z_{\mathcal{L}} e^{\gamma z} + Z_0 e^{\gamma z} + Z_{\mathcal{L}} e^{-\gamma z} - Z_0 e^{-\gamma z}}{Z_{\mathcal{L}} e^{\gamma z} + Z_0 e^{\gamma z} - Z_{\mathcal{L}} e^{-\gamma z} + Z_0 e^{-\gamma z}} \tag{30}$$

$$Z_{\text{in}}(z) = Z_0 \frac{Z_{\mathcal{L}}(e^{\gamma z} + e^{-\gamma z}) + Z_0(e^{\gamma z} - e^{-\gamma z})}{Z_0(e^{\gamma z} + e^{-\gamma z}) + Z_{\mathcal{L}}(e^{\gamma z} - e^{-\gamma z})} = Z_0 \frac{Z_{\mathcal{L}} + Z_0 \frac{e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}}{e^{\gamma z} + e^{-\gamma z}}}{Z_0 + Z_{\mathcal{L}} \frac{e^{\gamma z} - e^{-\gamma z}}{e^{\gamma z} + e^{-\gamma z}}} \tag{31}$$

$$Z_{\text{in}}(z) = Z_0 \frac{Z_{\mathcal{L}} + Z_0 \tanh(\gamma z)}{Z_0 + Z_{\mathcal{L}} \tanh(\gamma z)}, \quad -\mathcal{L} < z < 0. \tag{32}$$

3. Reflexión total. Resolver para ondas incidentes y reflejadas, unirlas a través del principio de superposición (aplicable en todos los medios), obtener los indices de reflexión correspondientes

y concluir sobre las similitudes y diferencias en cada medio. *Hint*: Para que pueda comprobar sus resultados considere que todos los casos corresponden a reflexión total con cambio de fase.

(a) [4 puntos] Sea la línea de transmisión de impedancia característica Z_0 (en figura 3):

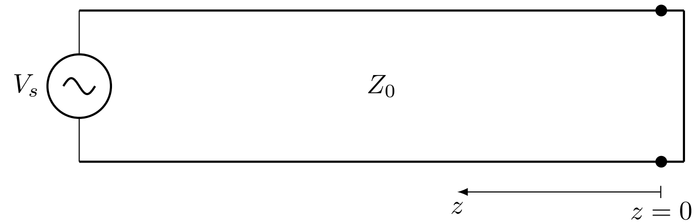

Figura 3: Linea de transmisión.

Donde la carga es un corto circuito (*shorted circuit*). Asumir de la figura 3 que el corto se encuentra en $z = 0$ y no existen perdidas, $\alpha = 0$. Asumiendo una forma estándar sinusoidal para el generador encuentre, en orden: la señal de tensión total en función de z, el índice de reflexión en función de la tensión incidente y reflejada, y, a través de mero análisis de sus resultados, establezca porque hay reflexión total.

(b) [3 puntos] Sea la cuerda la largo $\mathcal{L}$ de la figura 4:

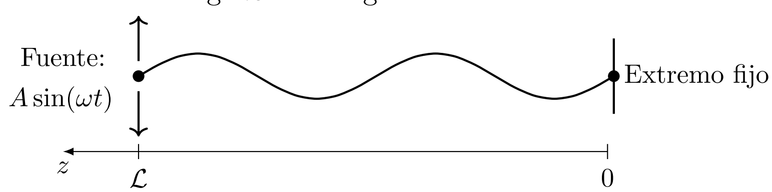

Figura 4: Cuerda forzada con un extremo fijo.

Encuentre la solución a la onda mecánica de la cuerda en régimen estacionario, $\eta(x,t)$, usando la ecuación de ondas estándar. Considere que la velocidad de propagación en la cuerda es u. Identifique en su respuesta final la componente de la onda incidente y la reflejada. Además construya un análogo al coeficiente de reflexión visto en línea de transmisión para la onda mecánica y establezca que estamos en presencia de reflexión total con cambio de fase.

(c) [3 puntos] Otra vez, pero en el espacio, sea la figura figura 5 donde $\vec{E}_i$ es una señal eléctrica polarizada línealmente:

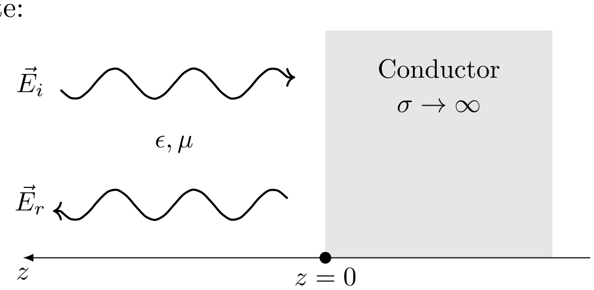

Figura 5: Onda eléctrica y medio conductor.

Sabemos que el primer medio tiene permitividad eléctrica ϵ con permeabilidad magnética μ, y el segundo medio es conductor con $\sigma \to \infty$. Al igual que en las partes anteriores de la pregunta se le pide obtener una expresión general para el campo eléctrico en el medio no conductor (esta vez puede usar la forma estándar de la solución a la ecuación de ondas) y obtener el coeficiente de reflexión. Ademas demuestre con ecuaciones o un análisis detallado el porque no existe transmisión del campo hacia el medio conductor.

Solución:

(a) Bajo nuestro sistema de referencia la onda incidente va hacia los negativos de z y por eso su forma estándar es:

$$V_i(z) = V_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\beta z)}. \tag{33}$$

Observación: si bien la incidente se mueve a los negativos de z la línea de transmisión en finita y esta expresión matemática carece de un sentido real fuera de la misma, aun así la señal "virtual" fuera de la línea es de gran ayuda para resolver este tipo de problema. Ahora para la onda reflejada:

$$V_r(z) = V_{0r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}. \tag{34}$$

Luego por simple superposición la onda total es:

$$V(z) = V_i(z) + V_r(z) = V_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\beta z)} + V_{0r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z)}. \tag{35}$$

Para calcular el indice de refección es adecuado establecer la condición de borde en primer lugar. Dado en $z = 0$ la línea es en corto entonces la diferencia de voltaje es nula, con ello:

$$V(z=0) = 0 \tag{36}$$

$$\implies V_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\beta\cdot 0)} + V_{0r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta\cdot 0)} = 0 \tag{37}$$

$$\implies V_{0r} = -V_{0i} = V_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} \tag{38}$$

$$\implies V_r(z) = V_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta z+\pi)} \tag{39}$$

Por definición el coeficiente de reflexion se obtiene en el cambio de medio, $z = 0$ en nuestro caso, y como el cociente de la onda reflejada e incidente:

$$\widehat{R} = \frac{V_r(z)}{V_i(z)} = \frac{V_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\beta\cdot 0+\pi)}}{V_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\beta\cdot 0)}} \tag{40}$$

$$\implies \widehat{R} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} = -1. \tag{41}$$

Este resultado implica que la onda reflejada tiene la misma magnitud que la onda incidente pero con una inversión de fase, lo cual confirma la reflexión total, por $enVert\widehat{R} = 1$, con cambio de fase, por el $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} = \underline{/180^\circ}$, en el cortocircuito.

(b) Como cualquier onda, la cuerda tiene que satisfacer la ecuación:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = u^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}. \tag{42}$$

Así mismo, por la oscilación forzada y el requisito de régimen estacionario, podemos establecer que la solución tiene forma tal que:

$$\eta(x,t) = X(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}. \tag{43}$$

Observación: se debe entender que al aplicar notación fasorial solo conservamos la parte real para problemas mecánicos. Remplazando:

$$(j\omega)^2 X(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = u^2 X''(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}. \tag{44}$$

Asumiendo que el fasor no se anula:

$$X(x) = -\frac{u^2}{\omega^2} X''(x), \tag{45}$$

$$X(x) = B\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{u}x} + C\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{u}x}. \tag{46}$$

Aplicando la condición de borde en $x = 0$, $B = -C$:

$$\implies X(x) = B\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{u}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{u}x}\right). \tag{47}$$

Para la condición de borde en $x = L$ primero hemos de adecuar el armónico a la forma de nuestra respuesta, es decir:

$$A\sin(\omega t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \to A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\cdot(-\mathrm{j}). \tag{48}$$

Considerando la ecuación (43) se tiene:

$$X(x = L) = -\mathrm{j}A, \tag{49}$$

y con la condición de borde:

$$B\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{u}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{u}x}\right) = -\mathrm{j}A \tag{50}$$

$$\implies B = \frac{-A}{2\sin\left(\frac{\omega L}{u}\right)}. \tag{51}$$

De esa manera la solución final es:

$$\eta(x,t) = \frac{-A}{2\sin\left(\frac{\omega L}{u}\right)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{u}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{u}x}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}. \tag{52}$$

Para visualizar claramente las ondas incidentes y reflejadas, acomodamos los términos tal que:

$$\eta(x,t) = A'\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta x)} - A'\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta x)}, \tag{53}$$

donde $A' = \frac{-A}{2\sin\left(\frac{\omega L}{u}\right)}$ y $\beta = \frac{\omega}{u}$. De la expresión obtenida, por simple inspección, notamos que el primer término corresponde a una onda viajera hacia los x negativos (onda incidente según la figura) y el segundo término una onda viajera hacia los x positivos (onda reflejada según la figura):

$$\eta_i = A'\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta x)} \tag{54}$$

$$\eta_r = -A'\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta x)} \tag{55}$$

Como lo hacíamos en LT vamos a obtener el coeficiente de reflexión como el cociente de estos valores y evaluarlos en el cambio de medio ($x = 0$ en este caso):

$$\widehat{R} = \frac{-A' \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta \cdot 0)}}{A' \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta \cdot 0)}} \tag{56}$$

$$\widehat{R} = -1 = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} = 1\underline{/180^\circ} \tag{57}$$

Ahora si, podemos establecer que estamos en reflexión total, por el modulo del coeficiente, y en cambio de fase, por los 180°.

(c) Como se nos permite llegar y establecer la solución a la ecuación de ondas, sabemos que:

$$\vec{E_i} = E_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta x)} \widehat{\mathbf{y}}. \tag{58}$$

Ya que la figura no especifica como apuntan los otros ejes, ortogonales a $\widehat{\mathbf{x}}$, y la onda esta polarizada línealmente, se opta por escribir el campo de esa manera. Análogamente para la onda reflejada:

$$\vec{E_r} = E_r \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta x)} \widehat{\mathbf{y}}. \tag{59}$$

Así, el campo total en el medio con ϵ y μ es:

$$\vec{E} = \left(E_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta x)} + E_r \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta x)} \right) \widehat{\mathbf{y}}. \tag{60}$$

Dado que solo hay elementos de campo paralelos a la interfaz usamos la condición de borde:

$$\left(E_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta \cdot 0)} + E_r \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta \cdot 0)} \right) \widehat{\mathbf{y}} = E_{\sigma 1} \widehat{\mathbf{y}} + E_{\sigma 2} \widehat{\mathbf{z}}. \tag{61}$$

Como se demostrara mas adelante, el campo eléctrico es nulo en el medio conductor, luego:

$$E_i e^{j\omega t} + E_r e^{j\omega t} = 0 \tag{62}$$

$$E_r = -E_i \tag{63}$$

$$\vec{E_r} = -E_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta x)} \widehat{\mathbf{y}}. \tag{64}$$

Repetimos lo usual para el coeficiente de reflexión:

$$\widehat{R} = \frac{\vec{E_r}}{\vec{E_i}} = \frac{-E_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \beta \cdot 0)} \widehat{\mathbf{y}}}{E_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \beta \cdot 0)} \widehat{\mathbf{y}}} \tag{65}$$

$$\widehat{R} = -1 = 1 \cdot e^{j\pi} = 1 \cdot \underline{/180^\circ}. \tag{66}$$

Y queda mas que claro que se repite el caso de reflexión total con cambio de fase. Para comprobar que no existe campo en el medio conductor podemos usar una de dos relaciones, la primera es que para medios líneales, homogéneos e isotrópicos se tiene:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \tag{67}$$

Si tuviéramos alguna especie de campo no nulo, también tendríamos una densidad de corriente infinita o extremadamente alta. También podemos recurrir a la formula para la profundidad de piel o profundidad de penetración dada por:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \epsilon \sigma}} \tag{68}$$

Donde claramente la profundidad es nula cuando la conductividad tiende al infinito.

4. Sea una guía de ondas rectangular de medidas $a = 4{,}5\,\mathrm{cm}$ y $b = 3{,}2\,\mathrm{cm}$ (asuma en el vacío).
   (a) [2 puntos bonus] Obtenga las frecuencias de corte de los modos TE_{10}, TE_{20}, TE_{01}, TE_{11}, TM_{11} y TE_{21}.
   (b) [2 puntos bonus] Para el modo fundamental TE $b < a$ obtenga, β_{mn}, $u_{\mathrm{ph},mn}$, λ_{mn} y $\eta_{\mathrm{TE},mn}$ a una frecuencia de $\nu = 7\,\mathrm{GHz}$.
   (c) [2 puntos bonus] Interprete brevemente el significado de los parámetros obtenidos con anterioridad.
   (d) [2 puntos bonus] Sea el campo eléctrico para el modo fundamental de la forma:

$$E_y = -\mathrm{j}220\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_{10}z}. \tag{69}$$

   Obtenga el vector de Poynting y su potencia promedio $\langle P\rangle$.

Solución:

(a) Luego se busca analizar los modos TE_{10}, TE_{20}, TE_{01}, TE_{11}, TM_{11}, TE_{21} donde se obtiene lo siguiente:

$$\mathrm{TE}_{10} \Rightarrow \nu_{\mathrm{cutoff},10} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2} = 3{,}3\,\mathrm{GHz} \tag{70}$$

$$\mathrm{TE}_{20} \Rightarrow \nu_{\mathrm{cutoff},20} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2} = 6{,}6\,\mathrm{GHz} \tag{71}$$

$$\mathrm{TE}_{01} \Rightarrow \nu_{\mathrm{cutoff},01} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{0}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = 4{,}6\,\mathrm{GHz} \tag{72}$$

$$\mathrm{TE}_{11} \Rightarrow \nu_{\mathrm{cutoff},11} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = 5{,}7\,\mathrm{GHz} \tag{73}$$

$$\mathrm{TM}_{11} \Rightarrow \nu_{\mathrm{cutoff},11} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = 5{,}7\,\mathrm{GHz} \tag{74}$$

$$\mathrm{TE}_{21} \Rightarrow \nu_{\mathrm{cutoff},21} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = 8{,}1\,\mathrm{GHz} \tag{75}$$

(b) Luego se busca obtener β_{mn}, $u_{\mathrm{ph},mn}$, λ_{mn}, y η_{mn} para una frecuencia de $7\,\mathrm{GHz}$ y dado que el siguiente termino se utilizara constantemente se obtiene como:

$$F_{10} = \sqrt{1 - \left(\frac{\nu_{\mathrm{cutoff},10}}{f}\right)^2} = 0{,}8819 \tag{76}$$

Luego el resto de valores corresponden a:

$$\beta_{10} = \beta_0 F_{10} = \frac{2\pi}{\lambda} F_{10} = \frac{2\pi\nu}{c} F_{10} = 129{,}29\,\mathrm{rad\,m^{-1}} \tag{77}$$

$$u_{\mathrm{ph},10} = \frac{c}{F_{10}} = 3{,}405 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{78}$$

$$\lambda_{10} = \frac{\lambda_0}{F_{10}} = \frac{\nu}{cF_{10}} = 26{,}485\,\mathrm{m} \tag{79}$$

$$\eta_{\mathrm{TE},10} = 120\pi F_{10} = 427{,}91\,\Omega. \tag{80}$$

Con lo que se obtiene los parámetros de interés para el modo mas bajo.

(c) Luego se busca interpretar los parámetros obtenidos con anterioridad, donde se tiene que:

- β_{mn} corresponde a la constante de fase, que es una adaptación a la constante de fase para una onda plana $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. En este caso la onda se propagará con distintos modos de vibración dependiente de la geometría de la guía de ondas.
- $u_{\mathrm{ph},mn}$ velocidad de fase, es la velocidad a la cual la modulación o *envelope* de una onda se propaga a través del medio. Esta velocidad es mayor a la velocidad de la luz en el medio, $u < u_{\mathrm{ph},mn}$.
- λ_{mn} es la longitud de onda de una onda viajera en una guía de ondas tal que posee un cambio de fase igual a 2π rad en al dirección del eje z.
- $\eta_{\mathrm{TE},mn}$ es la impedancia o impedancia intrínseca del modo TE_{mn}. Representa el cociente o *ratio* entre los campos eléctrico y magnético de una onda corregida por una propagación tipo TE.

(d) Calculamos Luego el vector de Poynting tal que:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left[\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}} \right], \tag{81}$$

reemplazando por ecuación (69) se obtiene:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left[E_y \widehat{\mathbf{y}} \times \frac{E_y}{\eta_{\mathrm{TE},10}} \widehat{\mathbf{x}} \right] \tag{82}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\left|E_y\right|^2}{\eta_{\mathrm{TE},10}} \tag{83}$$

$$= \frac{220^2}{2 \cdot 283{,}19\,\Omega} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \widehat{\mathbf{z}} \tag{84}$$

$$= 56{,}55 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \widehat{\mathbf{z}}. \tag{85}$$

Con lo que finalmente integrado sobre todo el conductor se obtiene lo siguiente:

$$\langle P\rangle = \int_{x=0}^{x=a}\int_{y=0}^{y=b} 85{,}455\cdot\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{86}$$

$$= 85{,}455b\int_{x=0}^{x=a}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x \tag{87}$$

$$= 85{,}455ab. \tag{88}$$

5. Sea una línea de transmisión visto en la figura 6 de impedancia característica $Z_0 = 40\,\Omega$ e impedancia $Z_l = (50-\mathrm{j}50)\,\Omega$, se le adiciona una línea de transmisión de longitud $l = 5\lambda/12$ en circuito abierto.
   (a) [2 puntos] Calcule la impedancia Z_{ca} del circuito vista a una distancia $5\lambda/12$.
   (b) [2 puntos] Calcule la impedancia equivalente en la línea de transmisión.
   (c) [4 puntos] Determine la distancia l con tal de adaptar la parte real de la admitancia equivalente, y la distancia l_s con tal de adaptar la parte imaginaria de la línea de transmisión tanto en corto circuito ($l_{\mathrm{s}}^{\mathrm{cc}}$) como en circuito abierto ($l_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ca}}$).
   (d) [2 puntos] Explique el proceso de adaptación.

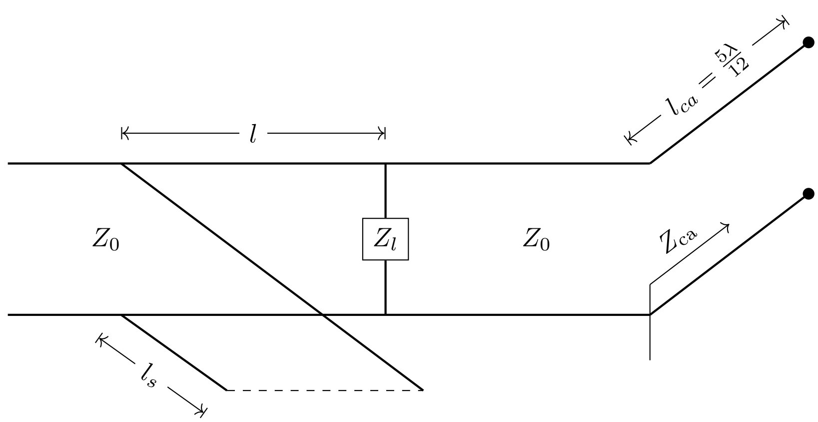

Figura 6: Linea de transmisión en circuito abierto.

Solución:

(a) La impedancia Z_{ca} del circuito se calculará con la formula Z_{in} para la cual se tiene que $Z_{\mathcal{L}} = \infty$ y $Z_0 = 50\,\Omega$.

$$Z_{\mathrm{ca}} = \frac{Z_0(Z_l + \mathrm{j}Z_0\tan(\beta l))}{(Z_0 + \mathrm{j}Z_l\tan(\beta l))} = Z_0\frac{\left(1+\frac{\mathrm{j}Z_0\tan(\beta l)}{Z_l}\right)}{\left((\frac{Z_0}{Z_l} + j\tan(\beta l)\right)} \tag{89}$$

$$= \frac{-\mathrm{j}Z_0}{\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{5\lambda}{12\pi}\right)} = \frac{-\mathrm{j}Z_0}{\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{j\sqrt{3}Z_0}{3}. \tag{90}$$

(b) La impedancia equivalente en la línea de transmisión será la impedancia de circuito abierto en paralelo con la impedancia de la carga $Z_{\mathrm{eq}} = Z_{\mathrm{ca}}/Z_l$. En este caso se tiene que $Z_l = (50 - \mathrm{j}50)\,\Omega$ y $Z_{\mathrm{ca}} = \mathrm{j}\sqrt{3}Z_0/3$ por lo que para conseguir Z_{eq} se tiene que:

$$Z_{\mathrm{eq}} = \frac{Z_{\mathrm{ca}}Z_L}{Z_{\mathrm{ca}} + Z_L} = \frac{\mathrm{j}\sqrt{3}Z_0/3(50 - 50\mathrm{j})}{j\sqrt{3}Z_0/3 + 50 - 50\mathrm{j}} \tag{91}$$

Esto nos dará como resultado

$$Z_{\mathrm{eq}} = 83{,}47 + \mathrm{j}37{,}15 \tag{92}$$

(c) Luego normalizando la impedancia se tiene $\frac{Z_{\mathrm{eq}}}{40}$

$$Z_{\mathrm{eq}} = 2{,}08 + \mathrm{j}0{,}93 \tag{93}$$

Luego calculando la admitancia para utilizar la carta smith se tiene:

$$Y_{eq} = \frac{1}{Z_{\mathrm{eq}}} = 0{,}4 - \mathrm{j}0{,}2 \tag{94}$$

Por lo que en la carta de smith se tiene que la parte real de la admitancia es 0,4 y la parte imaginaria es $-0{,}2$ por lo que se tiene utilizando la carta smith conseguimos los siguientes valores para l, l_s^{cc} y l_s^{ca}.

$$l = 0.2\lambda \tag{95}$$

$$l_{\mathrm{s}}^{\mathrm{cc}} = 0{,}125\lambda \tag{96}$$

$$l_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ca}} = 0{,}0375\lambda. \tag{97}$$

Recordar que cada uno de estos valores se obtiene de la carta de Smith y corresponden a valores aproximados.

(d)

¡Buena suerte!