Electromagnetismo Aplicado (EL3103)
Clase auxiliar 11
Prof. Tomás Cassanelli
Prof. Gonzalo Narváez
Ayudantes: Bruno Pollarolo - Joaquín Díaz

1. Responda las siguientes preguntas:
   (a) ¿Que es la llamada directivity de una radio antena?
   (b) Un interferometro de dos elementos separados a una distancia de b es capaz de medir un delay entre las dos antenas con un error $\delta\tau$ a esa medicion. ¿Cual es el error en la resolucion angular, $\delta\theta$, de este interferometro?
   (c) ¿Cual es la ecuacion del radiometro y que describe? Mencione cada uno de sus elementos (incluyendo temperaturas).
   (d) Explique que es holografia en el contexto de radio antenas.
   (e) ¿Que es la fotoelasticidad?
   (f) ¿Que sucede al final de una lınea de transmision en caso de que $R_L = R_C$, con L el largo total de la lınea?
   (g) Describa brevemente, la velocidad de fase, velocidad de grupo, y velocidad de propagacion de una onda TE o TM.
   (h) ¿Puede la impedancia intrınseca de una onda transportada en modo mn en TE o TM, ser un numero complejo? Argumente su respuesta.
   (i) Nombre a lo menos 3 tipos de lıneas de transmision comunes en industria de radio frecuencias.
   (j) ¿Que es la impedancia (comunmente referida como Z)? y ¿Cual es su diferencia con la resistencia (R o ρ)?
   (k) Mencione los componentes, mas comunes, de radio frecuencias que existen en una antena hasta su visualizacion espectral.

Solución:

- **¿Que es la llamada directivity de una radio antena?**
  Indica la capacidad de la antena para enfocarse en una dirección específica, lo que mejora la ganancia y la eficiencia en esa dirección. Se puede expresar como la relación entre la intensidad de radiación en una dirección específica y la intensidad de radiación promedio de la antena.

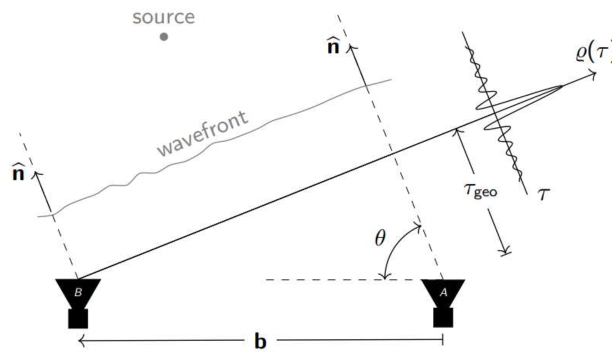
$$D_a(\theta, \phi) = \frac{U_{rad}(\theta, \phi)}{\langle U \rangle} \tag{1}$$

- **Un interferometro de dos elementos separados a una distancia de b es capaz de medir un delay entre las dos antenas con un error $\delta\tau$ a esa medicion. ¿Cual es el error en la resolucion angular, $\delta\theta$, de este interferometro?**
  Para entender este concepto, es de utilidad recordar que la resolucion angular nos dice cuan cerca

pueden estar dos fuentes para que el interferometro pueda distinguirlas. La resolucion angular se puede expresar como:

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D} \tag{2}$$

Luego tenemos el siguiente esquema que permite visualizar un interferometro



Luego sabemos podemos definir lo siguiente:

$$b \cdot \hat{n} = \tau c \tag{3}$$

$$b\cos(\theta) = \tau c \tag{4}$$

Considerando un error tenemos que:

$$\cos(\theta + \delta\theta) = \frac{c(\tau + \delta\tau)}{b} \tag{5}$$

$$\cos(\theta) - \sin(\theta)\delta\theta \approx \frac{c\tau}{b} + \frac{c\delta\tau}{b} \tag{6}$$

$$\frac{c\delta\tau}{b} \approx -\sin(\theta)\delta\theta \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Luego aproximando el $\sin(\theta) \approx \theta$, se obtiene que:

$$\delta\theta \approx \frac{c}{\theta b}\delta\tau \tag{9}$$

Con lo que se obtiene lo buscado

- **¿Cual es la ecuacion del radiometro y que describe? Mencione cada uno de sus elementos (incluyendo temperaturas).**
  La ecuacion del radiometro nos da una idea de una sensibilidad del sistema. Se puede expresar como:

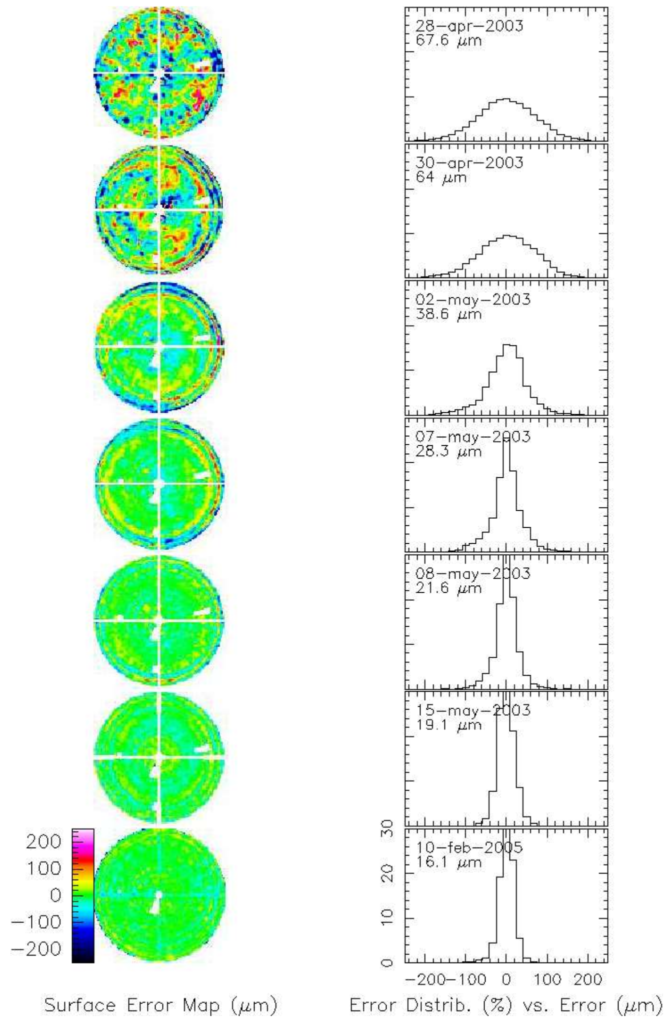
$$\sigma_T = k_c \frac{T_{sys}}{\sqrt{\Delta\nu t_{int}}} \tag{10}$$

  Donde $\Delta\nu$ es el ancho de banda de observacion y t_{int} es el tiempo de integracion, ademas T_{sys} es la temperatura del sistema y k_c es una constante de proporcionalidad.

$$T_{sys} = T_{ant} + T_{spill} + T_{sky} + T_{gal} + T_{rad} + T_{atm} + T_{rec} \tag{11}$$

  Por lo tanto un menor σ_T implica una mejor sensibilidad del sistema.

- **Explique que es holografia en el contexto de radio antenas.**
  Es una técnica utilizada para medir y analizar las características de la superficie y la estructura de las antenas de radio. Esta técnica permite crear un mapa detallado de la superficie de la antena, identificando deformaciones y errores que afectan el rendimiento



- **¿Que es la fotoelasticidad?**
  Fotoelasticidad es una propiedad de ciertos materiales transparentes (birrefringentes), que al ser sometidos a algun esfuerzo mecanico presentan cambios en sus propiedades de polarizacion.

- **¿Que sucede al final de una lınea de transmision en caso de que $R_L = R_C$**

  Como se vio en auxiliares previos, es el concepto del querer adaptar una línea, dado que de esta forma permite que no existan ondas viajando en sentido contrario y toda la potencia pueda ser entregada al dispositivo.

- **Describa brevemente, la velocidad de fase, velocidad de grupo, de una onda TE o TM.**

  - Velocidad de fase: velocidad con la cual la fase del frente de onda constante se propaga y es mayor a la velocidad de la luz en el material. Sin embargo, la energía no se propaga a esta velocidad. (Es importante no confundir con respecto a β, donde este último es la velocidad con la que se mueve esta fase a través del espacio, mientras que la velocidad de fase es una medida temporal de la propagación de esta fase.)

  - Velocidad de grupo: la velocidad a la cual la modulación o envolvente de una onda se propaga a través del medio. Esta velocidad es menor a la velocidad de la luz en el medio.

- **Nombre a lo menos 3 tipos de líneas de transmisión comunes en la industria de radiofrecuencias.**
  Algunas líneas de transmisión comunes pueden ser BCN, N-type, SMA, cable coaxial, guía de onda, microstrip, etc.

- **¿Qué es la impedancia (comúnmente referida como Z)? y ¿Cuál es su diferencia con la resistencia (R o ρ)?**
  La impedancia es una medida de oposición que presenta un circuito a una corriente cuando se aplica una tensión. La resistencia posee solo magnitud y se aplica en casos de Corriente Continua (CC), pero cuando existen Corriente Alterna (ondas sinusoidales) hablamos de impedancia Z la cual posee intensidad y fase. En general, podemos describir la impedancia como:

$$Z = R + jX \tag{12}$$

  Por otro lado, la resistividad ρ es una propiedad intrínseca de un material que indica cómo se opone al flujo de corriente eléctrica. Depende del material y de su temperatura, y se mide en ohmios-metro.

- **Mencione los componentes más comunes de radiofrecuencias que existen en una antena hasta su visualización espectral.**
  Antena, amplificador, bandpass filter, high- o low-pass filter, line equalizer, mixer, y finalmente un board de digitalización que por lo general es un board equipado con una Field Programmable Gate Array (FPGA). Una vez digitalizado, subgrupos son tomados y se les aplica una transformada de Fourier para channelize o separar la señal en canales espectrales.

2. Sea el esquema visto en la figura, con una carga de $Z_l = 20 - 40j$ a la cual se le adiciona un trozo de línea que se divide en un tramo de corto-circuito y circuito abierto, la cual tiene una distancia de $\lambda/6$ y $5\lambda/12$ respectivamente, con un $Z_0 = \eta_0 = 50[\Omega]$ se busca adaptar la línea mediante un stub terminado en cerrado y abierto

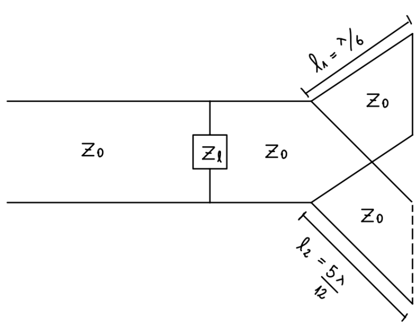


Figura 1: Guia de onda general

Solución:

Para poder adaptar la linea, se deberá en primera instancia reducirla a una impedancia equivalente. Comenzaremos con el circuito cerrado $Z_l = 0$.

$$\begin{aligned}
Z_{cc} &= \frac{Z_0(Z_l + j\tan(\beta l))}{(Z_0 + jZ_l\tan(\beta l))} && (13)\\
&= Z_0\frac{(0 + j\tan(\beta l))}{(Z_0 + j0\tan(\beta l))} && (14)\\
&= jZ_0\tan(\beta l) && (15)\\
&= jZ_0\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{6}\right) && (16)\\
&= jZ_0\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) && (17)\\
&= jZ_0\sqrt{3} && (18)
\end{aligned}$$

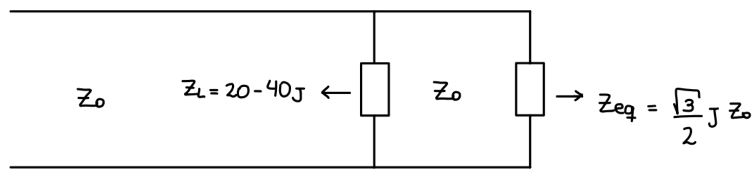
Análogamente para el circuito abierto se tendrá ($Z_l \to \infty$):

$$\begin{aligned}
Z_{ca} &= \frac{Z_0(Z_l + j\tan(\beta l))}{(Z_0 + jZ_l\tan(\beta l))} && (19)\\
&= Z_0\frac{\left(1 + \frac{jZ_0\tan(\beta l)}{Z_l}\right)}{\left(\frac{Z_0}{Z_l} + j\tan(\beta l)\right)} && (20)\\
&= \frac{Z_0}{j\tan(\beta l)} && (21)\\
&= \frac{-jZ_0}{\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{5\lambda}{12}\right)} && (22)\\
&= \frac{-jZ_0}{\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)} && (23)\\
&= \frac{j3Z_0}{\sqrt{3}} && (24)
\end{aligned}$$

Luego se tendrá que la impedancia equivalente vendrá dado por :

$$\begin{aligned}
Z_{eq} &= \left(\frac{1}{Z_{ca}} + \frac{1}{Z_{cc}}\right)^{-1} && (25)\\
&= \left(\frac{1}{jZ_0\sqrt{3}} + \frac{1}{\frac{j3Z_0}{\sqrt{3}}}\right)^{-1} && (26)\\
&= \left(\frac{1}{jZ_0\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{j3Z_0}\right)^{-1} && (27)\\
&= \left(\frac{3\sqrt{3}}{3jZ_0}\right)^{-1} && (28)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}jZ_0 && (29)
\end{aligned}$$

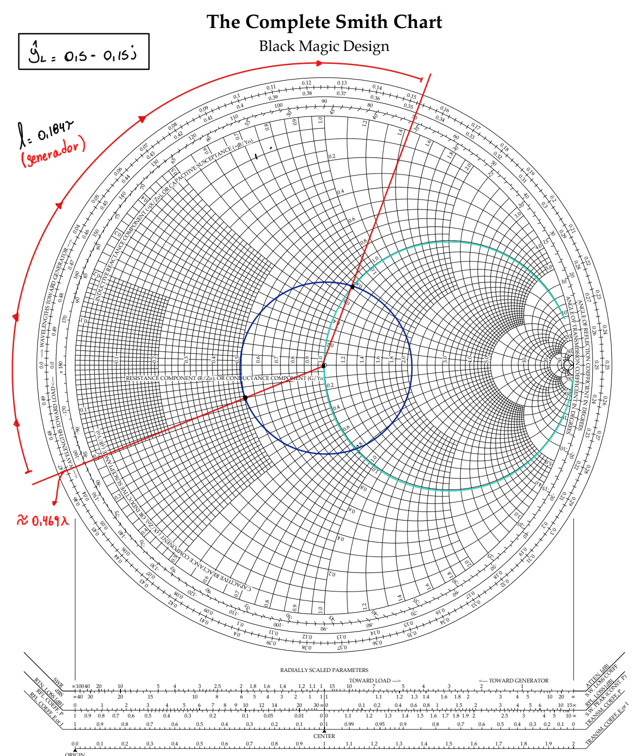
Luego se tendrá por tanto el siguiente esquema:



Luego calculamos nuevamente la impedancia equivalente. Para la normalización se considera $Z_0 = 50[\Omega]$:

$$Z_{eq}^* \approx 91 + 28j \tag{30}$$
$$z_l^* = 1.8 + 0.56j \tag{31}$$
$$y_l = 0.5 - 0.15j \tag{32}$$

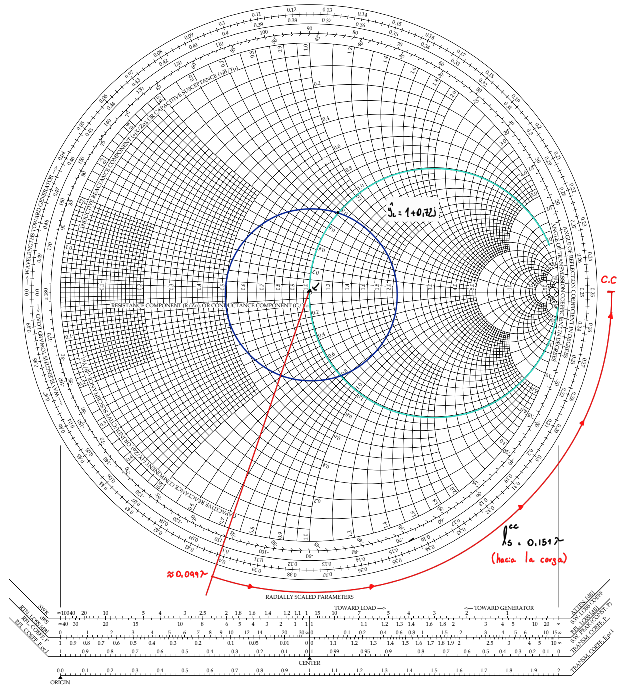
Finalmente se obtiene la impedancia equivalente por lo que podemos utilizar la carta Smith para realizar la adaptación.



The Complete Smith Chart

Black Magic Design

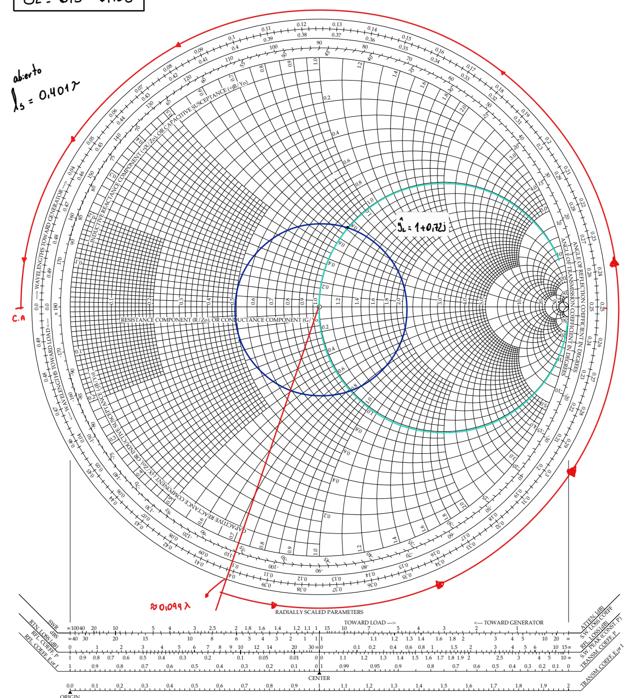
$\hat{y}_L = 0{,}5 - 0{,}15j$



The Complete Smith Chart

Black Magic Design

$\hat{y}_L = 0{,}5 - 0{,}15j$



Lo que permite finalmente adaptar la linea, dando como resultado para ambas situaciones $l_s^{cc} = 0.151\lambda$ y $l_s = 0.401\lambda$.

3. Un fenómeno altamente estudiado en física es de reflexión total y esta pregunta se centrará en evaluar dicho fenómeno en diferentes contextos estudiados en el curso, ademas del caso de la cuerda. Para ello debe de resolver las ondas incidentes y reflejadas, unirlas a través del principio de superposición (aplicable en todos los medios de la pregunta), obtener los indices de reflexión correspondientes y concluir sobre las similitudes y diferencias en cada medio. Hint: Para que pueda comprobar sus resultados considere que todos los casos corresponden a reflexión total sin cambio de fase.

   (a) Sea la linea de transmisión de impedancia característica Z_0:

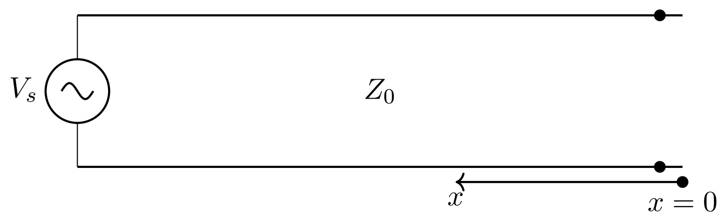


Figura 2: Linea de transmisión en circuito abierto.

   Donde la carga es un circuito abierto perfecto (Asumir de la figura 2 que el abierto se encuentra en $x = 0$) y no existen perdidas, $\alpha = 0$. Asumiendo una forma estándar sinusoidal para el generador encuentre, en orden: La señal de tensión total en función de x, el indice de reflexión en función de la tensión incidente y reflejada, y, a través de análisis de sus resultados, establezca porque hay reflexión total.

   (b) Sea la cuerda la largo L de la figura 3:

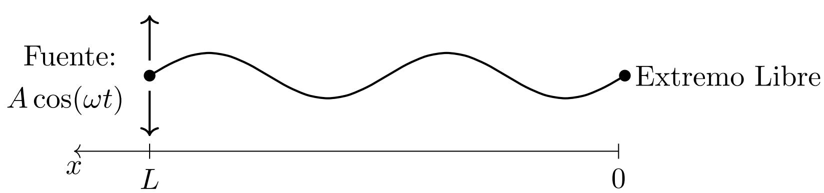


Figura 3: Cuerda forzada con un extremo libre.

   Encuentre la solución a la onda mecánica de la cuerda en régimen estacionario, $E(x,t)$, usando la ecuacion de ondas estándar. Considere que la velocidad de propagación en la cuerda es u. Identifique en su respuesta final la componente de la onda incidente y la reflejada. Ademas construya un análogo al coeficiente de reflexión visto en LT para la onda mecánica y establezca que estamos en presencia de reflexión total.

   (c) Otra vez, pero en el espacio, sea la figura 4 donde $\vec{B}_i$ es una señal magnética polarizada linealmente en el eje z de referencia:

   Sabemos que el primer medio tiene permitividad eléctrica ϵ con permeabilidad magnética μ, y el segundo medio es conductor con $\sigma \to \infty$. Al igual que en las partes anteriores de la pregunta se le pide obtener una expresión general para el campo magnético en el medio no conductor (Esta vez puede usar la forma estándar de la solución a la ecuacion de ondas) y obtener el coeficiente de reflexión. Por ultimo considere una densidad de corriente magnética superficial de la forma:

$$k_f = \frac{-2B_i}{\mu} e^{j\omega t} \widehat{\boldsymbol{y}}, \tag{33}$$

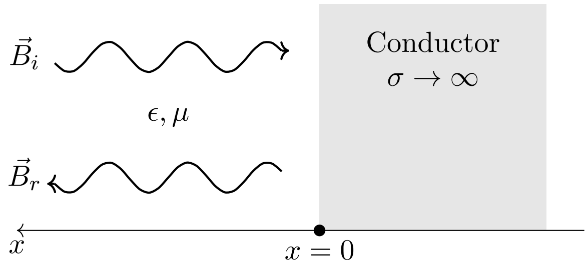


Figura 4: Onda magnética y medio conductor.

donde, B_i es la magnitud de la onda incidente. Obs: Se podría quitar el fasor de esta expresión, pero habría que ser consecuente en el resto del análisis, analizando solo la contribución espacial y añadiendo el termino temporal al final. Cualquiera de los métodos es correcto.

Solución:

(a) Según nuestro sistema de referencia, en el cual x va hacia los negativos, tendremos las siguientes ondas incidentes y reflejadas:

$$\begin{aligned} V_i(x) &= V_{0i}e^{j(\omega t+\beta x)} \\ V_r(x) &= V_{0r}e^{j(\omega t-\beta x)} \\ V(x,t) &= V_i(x) + V_r(x) = V_{0i}e^{j(\omega t+\beta x)} + V_{0r}e^{j(\omega t-\beta x)} \end{aligned}$$

Luego, el indice de reflexión, lo primero que hay que hacer, es buscar una relación entre las tensiones incidentes y reflejadas. Para ello, ocuparemos la condición de borde en $x = 0$, la cual nos dice que, como la línea se encuentra en circuito abierto la diferencia de voltaje debe ser nula, por lo que evaluando:

$$\begin{aligned} I(x=0) &= 0 \\ \implies \left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=0} &= 0 \\ \implies j\beta V_{0i}e^{j(\omega t+\beta\cdot 0)} - j\beta V_{0r}e^{j(\omega t-\beta\cdot 0)} &= 0 \\ \implies V_{0r} &= V_{0i} \\ \implies V_r(x) &= V_{0i}e^{j(\omega t-\beta x)} \end{aligned}$$

Luego el coeficiente de reflexión por definición es el cociente entre la onda reflejada y la incidente, por lo que:

$$\hat{R} = \frac{V_r(z)}{V_i(z)} = \frac{V_{0i}e^{j(\omega t-\beta\cdot 0)}}{V_{0i}e^{j(\omega t+\beta\cdot 0)}} = 1$$

Por lo que obtenemos que hay reflexión total, ya que la onda reflejada es igual a la incidente y el coeficiente de reflexión es 1.

(b) Para la cuerda, la solución a la ecuación de ondas es:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = u^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \tag{34}$$

Así mismo, por la oscilación forzada y el requisito de régimen estacionario, podemos establecer que la solución tiene forma tal que:

$$\eta(x,t) = X(x)e^{j\omega t} \tag{35}$$

Obs: Se debe entender que al aplicar notación fasorial solo conservamos la parte real para problemas mecánicos. Remplazando:

$$(j\omega)^2 X(x)e^{j\omega t} = u^2 X''(x)e^{j\omega t} \tag{36}$$

Asumiendo que el fasor no se anula:

$$X(x) = -\frac{u^2}{\omega^2} X''(x) \tag{37}$$

$$\implies X(x) = Be^{j\frac{\omega}{u}x} + Ce^{-j\frac{\omega}{u}x} \tag{38}$$

Donde B y C son constantes a determinar. Aplicando las condiciones de borde, en $x = 0$, dado que el extremo de la cuerda es libre, se tiene:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}_{x=0} = 0 \tag{39}$$

$$\implies X' = 0 \tag{40}$$

$$\implies Bj\frac{\omega}{u}e^{j\frac{\omega}{u}\cdot 0} - Cj\frac{\omega}{u}e^{-j\frac{\omega}{u}\cdot 0} = 0 \tag{41}$$

$$\implies B = C \tag{42}$$

Luego aplicando nuestro resultado tendremos:

$$X(x) = B\left(e^{j\frac{\omega}{u}x} + e^{-j\frac{\omega}{u}x}\right) \tag{43}$$

Para la condiciones de borde en $x = L$ primero hemos de adecuar el armónico a la forma de nuestra respuesta, es decir:

$$A\cos(\omega t) = Ae^{j\omega t} \tag{44}$$

Considerando la ecuación (35) y la condición de borde en $x = L$ se tiene:

$$X(x = L) = A \tag{45}$$

Por lo que despejando B de la ecuación (43) se tendrá:

$$X(x) = B\left(e^{j\frac{\omega}{u}x} + e^{-j\frac{\omega}{u}x}\right) = A \tag{46}$$

$$B = \frac{A}{2\cos\left(\frac{\omega L}{u}\right)} \tag{47}$$

De esa manera la solución final es:

$$\eta(x,t) = \frac{A}{2\cos\left(\frac{\omega L}{u}\right)}\left(e^{j\frac{\omega}{u}x} + e^{-j\frac{\omega}{u}x}\right)e^{j\omega t} \tag{48}$$

Para visualizar claramente las ondas incidentes y reflejadas, acomodamos los términos tal que:

$$\eta(x,t) = A'e^{j(\omega t+\beta x)} + A'e^{j(\omega t-\beta x)}, \tag{49}$$

donde $A' = \frac{A}{2\cos\left(\frac{\omega L}{u}\right)}$ y $\beta = \frac{\omega}{u}$. De la expresión obtenida, por simple inspección, notamos que el primer termino corresponde a una onda viajera hacia los x negativos (Onda incidente según la figura) y el segundo termino una onda viajera hacia los x positivos (Onda reflejada según la figura):

$$\eta_i = A' e^{j(\omega t + \beta x)} \tag{50}$$

$$\eta_r = A' e^{j(\omega t - \beta x)} \tag{51}$$

Como lo hacíamos en LT vamos a obtener el coeficiente de reflexión como el cociente de estos valores y evaluarlos en el cambio de medio ($x = 0$ en este caso):

$$\hat{R} = \frac{A' e^{j(\omega t - \beta \cdot 0)}}{A' e^{j(\omega t + \beta \cdot 0)}} \tag{52}$$

$$\hat{R} = 1 = 1 \cdot e^{j \cdot 0} = 1 \cdot \angle 0^\circ \tag{53}$$

Ahora si, podemos establecer que estamos en reflexión total, por el modulo del coeficiente, y sin cambio de fase, por los 0 grados.

(c) Sabemos que el primer medio tiene permitividad eléctrica ϵ con permeabilidad magnética μ, y el segundo medio es conductor con $\sigma \to \infty$. Al igual que en las partes anteriores de la pregunta se le pide obtener una expresión general para el campo magnético en el medio no conductor (Esta vez puede usar la forma estándar de la solución a la ecuacion de ondas) y obtener el coeficiente de reflexión. Por ultimo considere una densidad de corriente magnética superficial de la forma:

$$k_f = \frac{-2B_i}{\mu} e^{j\omega t} \hat{\boldsymbol{y}}, \tag{54}$$

donde, B_i es la magnitud de la onda incidente. Obs: Se podría quitar el fasor de esta expresión, pero habría que ser consecuente en el resto del análisis, analizando solo la contribución espacial y añadiendo el termino temporal al final. Cualquiera de los métodos es correcto.

Como se nos permite llegar y establecer la solución a la ecuacion de ondas, sabemos que:

$$\vec{B}_i = B_i e^{j(\omega t + \beta x)} \hat{\boldsymbol{z}} \tag{55}$$

Como se indica en el enunciado, cuando mencionan la polarización, el campo magnético esta alineado al eje $\hat{\boldsymbol{z}}$. Análogamente para la onda reflejada:

$$\vec{B}_r = B_r e^{j(\omega t - \beta x)} \hat{\boldsymbol{z}} \tag{56}$$

Así, el campo total en el medio con ϵ y μ es:

$$\vec{B} = \left(B_i e^{j(\omega t + \beta x)} + B_r e^{j(\omega t - \beta x)} \right) \hat{\boldsymbol{z}} \tag{57}$$

Con esta expresión se sabe que la única condición de borde no trivial es:

$$\frac{B_1^{||}}{\mu_1} - \frac{B_2^{||}}{\mu_2} = k_f \times \hat{\boldsymbol{n}} \tag{58}$$

Dado que solo hay elementos de campo paralelos a la interfaz y no hay onda en el medio 2 por ser conductor perfecto se deduce que $B_2 = 0$ por lo que evaluando la condición de borde (no olvidar que se evalua en $x = 0$) utilizando la ecuación (57) y la densidad de carga superficial, se tiene que:

$$\frac{1}{\mu}\left(B_i e^{j(\omega t+\beta\cdot 0)} + B_r e^{j(\omega t-\beta\cdot 0)}\right)\widehat{\boldsymbol{z}} = \frac{-2B_i}{\mu}e^{j\omega t}\widehat{\boldsymbol{y}}\times\widehat{\boldsymbol{x}} = \frac{2B_i}{\mu}e^{j\omega t}\widehat{\boldsymbol{z}} \tag{59}$$

Desarrollando la expresión obtenemos el siguiente resultado:

$$B_r = B_i \tag{60}$$

$$\implies \vec{B}_r = B_i e^{j(\omega t-\beta x)}\widehat{\boldsymbol{z}} \tag{61}$$

Repetimos lo usual para el coeficiente de reflexión:

$$\hat{R} = \frac{\vec{B}_r}{\vec{B}_i} = \frac{B_i e^{j(\omega t-\beta\cdot 0)}\widehat{\boldsymbol{z}}}{B_i e^{j(\omega t+\beta\cdot 0)}\widehat{\boldsymbol{z}}} \tag{62}$$

$$\hat{R} = 1 = 1\cdot e^{j\cdot 0} = 1\cdot\angle 0^\circ \tag{63}$$

Así, queda mas que claro que se repite el caso de reflexión total sin cambio de fase.