



Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Electromagnetismo Aplicado (EL3103) Control 1

Prof. Tomás Cassanelli
Prof. Aux. Gonzalo Nárvaez

Tiempo: 10:15 to 12:15

Primavera 2024

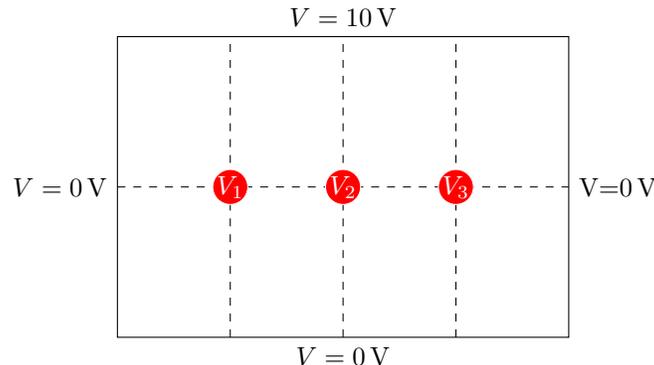
Puntos: 10

Nombre:

Responda una pregunta **por hoja**. Favor **no olvidar** escribir su nombre. Para cantidades vectoriales (usualmente definidas como \mathbf{A} en clase), favor usar flecha \vec{A} para indicar que son vectores y sin flecha para escalares $A \equiv \|\vec{A}\|$, y para matrices $[A]$ usar corchetes.

- [10 puntos] Una placa rectangular de $8m \times 4m$ posee potenciales cero en sus lados excepto en su parte superior. La distribución de carga, sin embargo, está dada por $\rho = 5\epsilon_0$. Entonces, resuelva numéricamente la ecuación de Poisson definiendo una ecuación de potencial (*i.e.*, *five-point equal arm difference*) y determine la dirección del campo eléctrico en el centro de la placa.

Solución El mallado a realizar dadas las condiciones del enunciado es el siguiente:



La ecuación de diferencias finitas en cada nodo se puede escribir como:

$$\frac{V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 4V_{i,j}}{h^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

donde h es el tamaño de paso entre los nodos, y $\rho = 5\epsilon_0$.

En el caso de los nodos V_1 , V_2 , y V_3 , aplicamos la fórmula de diferencias finitas, y considerando las condiciones de frontera $V = 0$ en los lados izquierdo, derecho e inferior, y $V = 10$ V en la parte superior, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

Para V_1 :

$$-4V_1 + V_2 = 4 \left(-\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) - 10$$

Para V_2 :

$$V_1 - 4V_2 + V_3 = 4 \left(-\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) - 10$$

Para V_3 :

$$V_2 - 4V_3 = 4 \left(-\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) - 10$$

Sustituyendo $\frac{\rho}{\epsilon_0} = 5$, tenemos el sistema:

$$-4V_1 + V_2 = -30, \quad V_1 - 4V_2 + V_3 = -30, \quad V_2 - 4V_3 = -30.$$

Esto se puede expresar en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ -30 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo este sistema lineal, obtenemos los siguientes valores para los potenciales:

$$V_1 \sim 10.71 \text{ V}, \quad V_2 \sim 12.85 \text{ V}, \quad V_3 \sim 10.71 \text{ V}.$$

Ahora, para determinar la dirección del campo eléctrico en el centro de la placa, recordamos que el campo eléctrico se define como el gradiente negativo del potencial, es decir, $\vec{E} = -\nabla V$.

Dado que el potencial en la parte superior de la placa es $V = 10 \text{ V}$ y en la parte inferior es $V = 0 \text{ V}$, el campo eléctrico apunta desde las regiones de mayor potencial hacia las de menor potencial. En este caso, el campo eléctrico en el centro de la placa claramente apunta hacia abajo, es decir, de la parte superior de la placa (donde $V = 10 \text{ V}$) hacia la parte inferior (donde $V = 0 \text{ V}$).