



Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Electromagnetismo Aplicado (EL3103)

Control 1

Prof. Tomás Cassanelli

Prof. Gonzalo Narváez

Ayudantes: Bruno Pollarolo - Joaquín Díaz

Tiempo: 10:15–12:15 hrs.

Otoño 2024

Puntos: 40

Nombre:

Responda una pregunta **por hoja**. Favor **no olvidar** escribir su nombre. Para cantidades vectoriales (usualmente definidas como \mathbf{A} en clase), favor usar flecha \vec{A} para indicar que son vectores y sin flecha para escalares $A \equiv \|\vec{A}\|$, y para matrices $[A]$ usar corchetes.

1. Preguntas de contenido:

- [2 puntos] Explique qué es la frecuencia de Nyquist y por qué es importante en el muestreo de señales.
- [2 puntos] ¿En qué rango de radio frecuencias es la ionosfera más efectiva para reflejar ondas de radio?
- [2 puntos] Describa las propiedades de una onda electromagnética plana.
- [2 puntos] ¿Qué es la transformación de Lorentz?
- [2 puntos] ¿Qué es la llamada *dark current* de un detector óptico (*charged coupled device*)?
- [2 puntos bonus] ¿Qué es una estructura *microstrip* en radio frecuencias? Realice un bosquejo.
- [2 puntos bonus] Mencione el orden de precisión de un reloj atómico de Rubidio.

Solución:

- La frecuencia de Nyquist es la frecuencia máxima a la que se puede muestrear una señal sin perder información.
- La ionosfera es más efectiva para reflejar ondas de radio en el rango de frecuencias menores a 100 MHz.
- Una onda electromagnética plana es la cual su frente de onda no posee cambios en su estructura dependientes de la posición (como lo que pasa con un frente de ondas esférico). Por lo general un frente de ondas es plano al estar a una distancia infinita del emisor o de la fuente (adicionalmente menor la distancia *far-field*).
- La transformación de Lorentz es una transformación de coordenadas que permite pasar de un sistema de referencia a otro que se mueve a una velocidad constante con respecto al primero. Esta transformación es fundamental en la teoría de la relatividad especial.

- (e) La *dark current* es la corriente que circula por un detector óptico cuando no hay luz incidente sobre él. Para conocer su valor por lo general se realizan exposiciones con el *shutter* de la cámara cerrado.
- (f) Una estructura *microstrip* es una guía de onda que consiste en un conductor plano sobre un sustrato dieléctrico. La onda electromagnética se propaga en la interfaz entre el conductor y el dieléctrico.
- (g) De nanosegundos a microsegundos.

2. [10 puntos] Una placa rectangular de $8m \times 4m$ posee potenciales cero en sus lados excepto en su parte superior. La distribución de carga, sin embargo, está dada por $\rho = 5\epsilon_0$. Entonces, resuelva numéricamente la ecuación de Poisson definiendo una ecuación de potencial (*i.e.*, *five-point equal arm difference*) y determine la dirección del campo eléctrico en el centro de la placa.

Solución:

Pendiente....

3. [6 puntos] Se tiene una region cilindrica, con la siguiente condición de borde $V(R, z) = V_0$, como se indica en la figura 1, y se propone encontrar el potencial explícito, dada la siguiente ecuación.

$$V(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n I_0 \left(\frac{n\pi r}{l} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{l} \right) \quad (1)$$

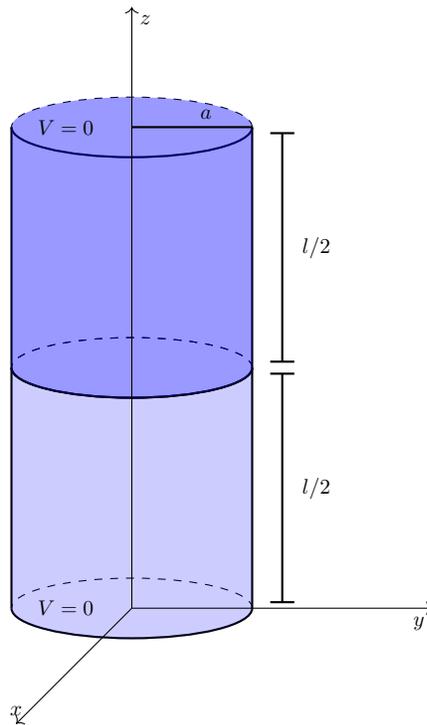


Figura 1: Estructura cilíndrica.

Solución:

Hay que determinar la constante C_n para poder encontrar el potencial. Para ello se utiliza la siguiente relación con la serie de senos de Fourier y las condiciones de borde en $r = R$:

$$V(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n I_0 \left(\frac{n\pi r}{l} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{l} \right) = f(z) = V_0 \quad (2)$$

$$A_n = C_n I_0 \left(\frac{n\pi R}{l} \right) = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \sin \left(\frac{n\pi z}{l} \right) dz \quad (3)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(V_0 \int_0^l \sin \left(\frac{n\pi z}{l} \right) dz \right) \quad (4)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ impar} \\ \frac{4V_0}{n\pi} & \text{para } n = \text{par} \end{cases} \quad (5)$$

$$V(r, z) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=\text{par}} \frac{\frac{1}{n} I_0 \left(\frac{n\pi r}{l} \right) \sin \left(\frac{n\pi z}{l} \right)}{I_0 \left(\frac{n\pi R}{l} \right)} \quad (6)$$

4. Una esfera centrada en el origen tiene radio R . Encuentre la densidad de carga volumétrica $\rho(r, \theta, \phi)$ (confinada en $r < R$) y la densidad de carga superficial $\sigma(\theta, \phi)$ (confinada en $r = R$) que juntas producen el campo eléctrico dado a continuación. Exprese la respuesta utilizando funciones trigonométricas:

$$\mathbf{E} = -\frac{2V_0 x}{R^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{2V_0 y}{R^2} \hat{\mathbf{y}} - \frac{V_0}{R} \hat{\mathbf{z}}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2. \quad (7)$$

- (a) [3 puntos] Integre cada componente del campo $\mathbf{E} = -\nabla V$ para encontrar el potencial eléctrico V .
- (b) [3 puntos] Verifique que V_{in} satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$ dentro de la esfera. Determine si hay una densidad de carga volumétrica $\rho(r, \theta, \phi)$ en $r < R$.
- (c) [4 puntos] Use la condición de continuidad del campo eléctrico en la superficie $r = R$ para encontrar la densidad de carga superficial $\sigma(\theta, \phi)$. *Hint:* Asuma que el campo afuera de la esfera es:

$$V_{\text{out}}(r, \theta, \phi) = V_0 \frac{R^2}{r^2} \cos \theta + V_0 \frac{R^3}{r^3} \sin^2 \theta \cos 2\phi, \quad r \geq R. \quad (8)$$

Solución:

- (a) Para obtener el potencial eléctrico V , se integra cada componente del campo eléctrico $\mathbf{E} = -\nabla V$.

El campo eléctrico dado es:

$$\mathbf{E} = -\frac{2V_0}{R^2}x\hat{\mathbf{x}} + \frac{2V_0}{R^2}y\hat{\mathbf{y}} - \frac{V_0}{R}\hat{\mathbf{z}}. \quad (9)$$

Cada componente del campo eléctrico se puede expresar como derivadas parciales del potencial:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right). \quad (10)$$

Integrando la componente x del campo eléctrico:

$$\hat{\mathbf{x}} : \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{2V_0}{R^2}x \quad \Rightarrow \quad V = \frac{V_0}{R^2}x^2 + f(y, z). \quad (11)$$

Integrando la componente y :

$$\hat{\mathbf{y}} : \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2V_0}{R^2}y \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{V_0}{R^2}y^2 + g(x, z). \quad (12)$$

Finalmente, integrando la componente z :

$$\hat{\mathbf{z}} : \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{V_0}{R} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{V_0}{R}z + h(x, y). \quad (13)$$

Combinando los resultados de las tres ecuaciones integradas 11, 12, y 13, se obtiene el potencial completo dentro de la esfera:

$$V_{\text{in}}(x, y, z) = \frac{V_0}{R^2}(x^2 - y^2) + \frac{V_0}{R}z + \text{constante}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2. \quad (14)$$

(b) Ahora se verifica que V_{in} satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$ dentro de la esfera. Para ello, se calcula el laplaciano en coordenadas cartesianas.

El laplaciano de V en coordenadas cartesianas es:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (15)$$

Primero se derivan las segundas derivadas parciales de V_{in} :

- Para $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, derivando dos veces la expresión $\frac{V_0}{R^2}x^2$, se obtiene $\frac{2V_0}{R^2}$.
- Para $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, derivando dos veces $-\frac{V_0}{R^2}y^2$, se obtiene $-\frac{2V_0}{R^2}$.
- Para $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, derivando dos veces $\frac{V_0}{R}z$, se obtiene 0.

Sumando estas contribuciones, se obtiene:

$$\nabla^2 V_{\text{in}} = \frac{2V_0}{R^2} - \frac{2V_0}{R^2} = 0. \quad (16)$$

Esto confirma que el potencial V_{in} satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$. Dado que $\rho = -\varepsilon_0 \nabla^2 V$, se concluye que no hay carga volumétrica dentro de la esfera:

$$\rho(r, \theta, \phi) = 0, \quad r < R. \quad (17)$$

- (c) Para encontrar la densidad superficial de carga $\sigma(\theta, \phi)$, se utiliza la condición de continuidad del campo eléctrico en la superficie $r = R$. El potencial dentro de la esfera ya ha sido calculado (reemplazan cambio de variables esférico $x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$)

$$V_{\text{in}}(r, \theta, \phi) = V_0 \frac{r}{R} \cos \theta + V_0 \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \theta \cos 2\phi, \quad r \leq R. \quad (18)$$

El potencial fuera de la esfera se asume que toma la forma:

$$V_{\text{out}}(r, \theta, \phi) = V_0 \frac{R^2}{r^2} \cos \theta + V_0 \frac{R^3}{r^3} \sin^2 \theta \cos 2\phi, \quad r \geq R. \quad (19)$$

Para encontrar la densidad superficial de carga, se usa la diferencia entre las derivadas radiales del potencial en $r = R$:

$$\sigma(\theta, \phi) = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial V_{\text{in}}}{\partial r} - \frac{\partial V_{\text{out}}}{\partial r} \right)_{r=R}. \quad (20)$$

Calculando las derivadas radiales:

- Para V_{in} :

$$\frac{\partial V_{\text{in}}}{\partial r} = \frac{V_0}{R} \cos \theta + 2 \frac{V_0 r}{R^2} \sin^2 \theta \cos 2\phi. \quad (21)$$

- Para V_{out} :

$$\frac{\partial V_{\text{out}}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(V_0 \frac{R^2}{r^2} \cos \theta + V_0 \frac{R^3}{r^3} \sin^2 \theta \cos 2\phi \right) \quad (22)$$

$$= V_0 \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R^2}{r^2} \right) + V_0 \sin^2 \theta \cos 2\phi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R^3}{r^3} \right) \quad (23)$$

$$= V_0 \cos \theta \left(-\frac{2R^2}{r^3} \right) + V_0 \sin^2 \theta \cos 2\phi \left(-\frac{3R^3}{r^4} \right) \quad (24)$$

$$= -\frac{2V_0 R^2 \cos \theta}{r^3} - \frac{3V_0 R^3 \sin^2 \theta \cos 2\phi}{r^4}. \quad (25)$$

Sustituyendo estos valores en la expresión para $\sigma(\theta, \phi)$, se obtiene la densidad superficial de carga:

$$\sigma(\theta, \phi) = \varepsilon_0 \frac{V_0}{R} (3 \cos \theta + 5 \sin^2 \theta \cos 2\phi). \quad (26)$$

5. Téngase un par de placas paralelas como se indica en la figura 2. Considere que la fuente provee al cátodo un potencial $V = 0$, al ánodo una tensión positiva $V = V_1$ y el área que cubren las placas es A . Considere también que las cargas dentro del capacitor se mueven de manera estacionaria creando una densidad de corriente:

$$\mathcal{J} = -\rho v \hat{x} \quad (27)$$

Donde ρ es una densidad de carga que debe ser deducida y v la velocidad a la que se mueve esa carga. Hint: Dentro de las placas, la energía cinética y la energía debido al campo coinciden para los electrones.

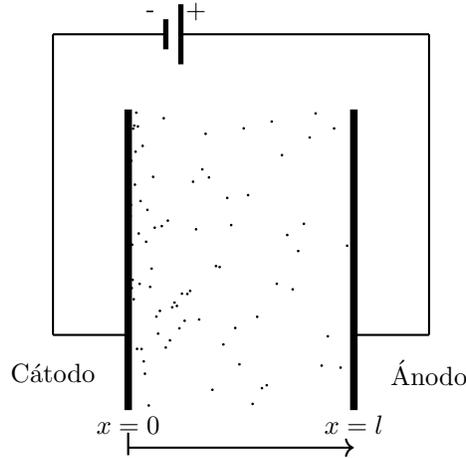


Figura 2: Capacitor de placas paralelas.

- [2 puntos] Determine la densidad de carga ρ en función del potencial eléctrico V y la densidad de corriente \mathcal{J}
- [2 puntos] Deduzca la expresión para el potencial eléctrico V entre las placas definiendo al mismo en todo el espacio entre placas y en las fronteras.
- [4 puntos bonus] Calcule el campo eléctrico E y la energía eléctrica almacenada entre las placas.
- [3 puntos bonus] Obtenga la expresión para la corriente I :

$$I = \frac{4\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m}} V_1^{3/2} \frac{A}{l^2} \quad (28)$$

Además demuestre que dicha expresión coincide dimensionalmente con I en el SI (Sistema Internacional de Unidades). Hint: Use que el voltaje se dimensiona como $\frac{ML^2}{T^3I}$ y la permitividad eléctrica como $\frac{I^2 T^4}{ML^3}$.

Solución:

- (a) A partir del principio de conservación de la energía, podemos establecer que la energía cinética de las partículas es igual a la energía potencial eléctrica a la que están sometidas. Es decir:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \quad (29)$$

Todas las partículas deben su energía cinética al potencial que las acelera. Lo mismo ocurre con otros tipos de potenciales, como el gravitacional, el químico o el nuclear fuerte, por citar algunos ejemplos. Usando esta relación y la densidad de corriente dada, se obtiene:

$$\rho = -\mathcal{J} \sqrt{\frac{m}{2eV}} \quad (30)$$

Donde m es la masa del electrón, e su carga, y V el potencial eléctrico.

- (b) Sabemos que, al haber una densidad de carga en el espacio que estamos evaluando, debemos considerar que el potencial eléctrico satisface la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (31)$$

Debido a la geometría del problema, podemos imponer que la variación del potencial ocurre únicamente en la dirección x . Además, usando la relación en la ecuación (30), es evidente que la densidad de carga también depende de x . Así, tenemos:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\mathcal{J}}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2eV}} \quad (32)$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = k \cdot V^{-\frac{1}{2}} \quad (33)$$

Donde $k = \frac{\mathcal{J}}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}$. (Nota: Podemos incluir a \mathcal{J} en la constante de la EDO, dado que, al tener conservación de la carga, se asume que el flujo es constante en todo x). Ahora hemos de recurrir a lo básico en ecuaciones diferenciales:

$$V'' = k \cdot V^{-\frac{1}{2}} \quad (34)$$

$$\frac{dV'}{dx} = k \cdot V^{-\frac{1}{2}} \quad (35)$$

$$\frac{dV'}{dV} \cdot \frac{dV}{dx} = k \cdot V^{-\frac{1}{2}} \quad (36)$$

$$\frac{dV'}{dV} \cdot V' = k \cdot V^{-\frac{1}{2}} \quad (37)$$

$$V' dV' = k \cdot V^{-\frac{1}{2}} dV \quad (38)$$

$$\int V' dV' = \int k \cdot V^{-\frac{1}{2}} dV \quad (39)$$

$$\frac{(V')^2}{2} = 2k \cdot V^{\frac{1}{2}} + C \quad (40)$$

$$(V')^2 = 4k \cdot V^{\frac{1}{2}} + C \quad (41)$$

Bien, antes de proseguir hemos de esclarecer que existe una condición de frontera útil. Sabemos que las cargas en el ánodo parten del reposo y aceleran a través del espacio entre las placas. El resultado de esta limitación de carga espacial es que el campo eléctrico sera nulo, entonces:

$$E = -V' = 0 \quad (42)$$

Usando esta condición de frontera y la condición del enunciado $V(x = 0) = 0$ en la relación de la ecuación (41) podemos establecer que:

$$0 = 0 + C \implies C = 0 \quad (43)$$

Ahora podemos proseguir con la EDO tal que:

$$(V')^2 = 4k \cdot V^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

$$\frac{dV}{dx} = 2\sqrt{k \cdot V^{\frac{1}{2}}} \quad (45)$$

$$V^{-\frac{1}{4}} dV = 2\sqrt{k} dx \quad (46)$$

$$\int V^{-\frac{1}{4}} dV = 2 \int \sqrt{k} dx \quad (47)$$

$$\frac{4}{3} V^{\frac{3}{4}} = 2\sqrt{k}x + B \quad (48)$$

Si volvemos a usar lo establecido por enunciado, $V(x = 0) = 0$, se tiene que:

$$0 = 0 + B \implies B = 0 \quad (49)$$

Con ello procedemos a establecer que:

$$\frac{4}{3} V^{\frac{3}{4}} = 2\sqrt{k}x \quad (50)$$

$$V^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{k}x \quad (51)$$

$$V = \left(\frac{3}{2}\sqrt{k}\right)^{\frac{4}{3}} x^{\frac{4}{3}} \quad (52)$$

Usando la segunda condición de frontera dada por enunciado, $V(x = l) = V_1$ se obtiene:

$$V_1 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{k}\right)^{\frac{4}{3}} l^{\frac{4}{3}} \quad (53)$$

$$\frac{V_1}{l^{\frac{4}{3}}} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{k}\right)^{\frac{4}{3}} \quad (54)$$

$$V = V_1 \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{4}{3}} \quad (55)$$

Finalmente se obtiene un potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ V_1 \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{4}{3}} & \text{si } x \in (0, l), \\ V_1 & \text{si } x = l. \end{cases} \quad (56)$$

- (c) Sabemos que el campo eléctrico $E(x)$ está relacionado con el potencial eléctrico $V(x)$ mediante la siguiente relación:

$$E(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \quad (57)$$

Usando la expresión para el potencial que se ha obtenido anteriormente, calculamos el campo eléctrico en cada región:

$$E(x) = -\frac{4}{3}V_1\frac{1}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (58)$$

Para la energía eléctrica almacenada entre las placas, usamos la fórmula de la densidad de energía eléctrica en un campo eléctrico, que es:

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad (59)$$

La energía total almacenada entre las placas, usando que el área de las placas es A , se calcula integrando la densidad de energía a lo largo de la distancia entre las placas:

$$U_E = \int_0^l \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 A dx \quad (60)$$

Sustituyendo $E(x)$ en la expresión:

$$U_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 A \int_0^l \left(-\frac{4}{3}V_1\frac{1}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 dx \quad (61)$$

Resolvemos la integral para obtener la energía total. Después de simplificar, obtenemos:

$$U_E = \frac{8}{15}\frac{\epsilon_0 A V_1^2}{l} \quad (62)$$

- (d) Usando la ecuación en (53) y devolviendo la definición que le dimos a k :

$$V_1 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{J}}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}}\right)^{\frac{4}{3}} l^{\frac{4}{3}} \quad (63)$$

Despejando para \mathcal{J} se tiene:

$$\mathcal{J} = \frac{4\epsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{V_1^{3/2}}{l^2} \quad (64)$$

Integrando en el área arbitraria se llega a lo pedido:

$$I = \frac{4\epsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}V_1^{3/2}\frac{A}{l^2} \quad (65)$$

Usando el hint se tiene un análisis dimensional X para la expresión tal que:

$$X = \frac{I^2 T^4}{ML^3} \frac{I^{1/2} T^{1/2}}{M^{1/2}} \left(\frac{ML^2}{T^3 I} \right)^{3/2} \frac{L^2}{L^2} \quad (66)$$

$$\implies X = \frac{I^{5/2} T^{9/2}}{M^{3/2} L^3} \frac{M^{3/2} L^3}{T^{9/2} I^{3/2}} \quad (67)$$

$$\implies X = I \quad (68)$$

De esa manera queda demostrado que la expresión obtenida coincide dimensionalmente con lo esperado.

¡Buena suerte!