Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Electromagnetismo Aplicado (EL3103)
Clase auxiliar 7

Prof. Tomás Cassanelli
Prof. Gonzalo Narváez
Ayudantes: Bruno Pollarolo - Joaquín Díaz

1. Resuelva los siguientes problemas basados en el esquema de la figura 1.
   (a) Las expresiones para el campo eléctrico $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ y la intensidad magnética $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.
   (b) Obtenga una expresión para E_1^- (onda reflejada del medio 1), tal que esta dependa de (E_2^-, Y_2, Y_3, Y_1) considerando una distancia $d = \frac{\lambda}{4}$.
   (c) Sea el caso en que $\epsilon_2 = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_3}$, demuestre en base a la expresión anterior que no existirá onda reflejada en el medio 1. Hint: ocupar la siguiente expresión:

$$(b+c)(b-a) + (b+a)(b-c) = (b^2 - ac) \tag{1}$$

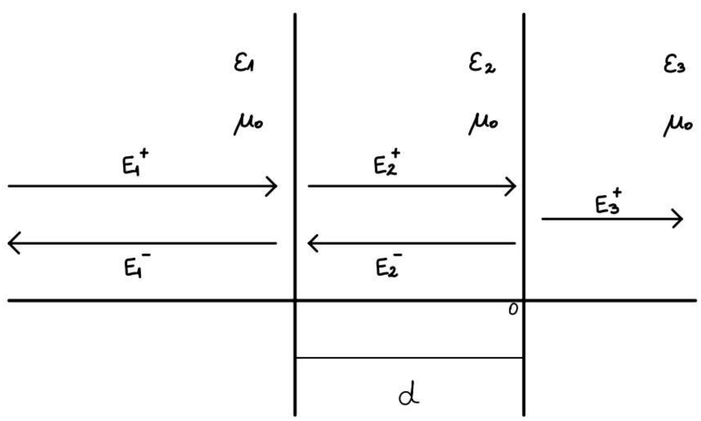

Figura 1: Onda en 3 medios.

Solución:

(a) Se tiene las siguientes expresiones para los campos eléctricos y magnéticos según los medios y las zonas de interés:

Campo eléctrico e intensidad magnética en z ≤ d

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_1 = E_1^+ e^{-jk_1 z} + E_1^- e^{jk_1 z} \tag{2}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_1 = Y_1 E_1^+ e^{-jk_1 z} - Y_1 E_1^- e^{jk_1 z} \tag{3}$$

Campo eléctrico e intensidad magnética para d ≤ z ≤ 0

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_2 = E_2^+ e^{-jk_2 z} + E_2^- e^{jk_2 z} \tag{4}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_2 = Y_2 E_2^+ e^{-jk_2 z} - Y_2 E_2^- e^{jk_2 z} \tag{5}$$

Campo eléctrico e intensidad magnética eléctricos z ≥ 0

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_3 = E_3^+ e^{-jk_3 z} + 0 \tag{6}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_3 = Y_3 E_3^+ e^{-jk_3 z} + 0 \tag{7}$$

Recordando que en el medio 3 no existe onda reflejada, por lo que se tiene que $E_3^- = 0$.

(b) Se busca el obtener una relación para la intensidad de campo eléctrico E_1^- tal que dependa de las variables (E_2^-, Y_2, Y_3, Y_1). Para lograr estos, utilizaremos las condiciones de bordes en las interfaces de los medios.

Primera condición de borde $z = -d$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_1(z = -d) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_2(z = -d) \tag{8}$$
$$E_1^+ e^{jk_1 d} + E_1^- e^{-jk_! d} = E_2^+ e^{jk_2 d} + E_2^- e^{-jk_2 d} \tag{9}$$

Luego evaluando en d=$\lambda/4$ se tendrá:

$$E_1^+(j) + E_1^-(-j) = E_2^+(j) + E_2^-(-j) \tag{10}$$
$$E_1^+ - E_1^- = E_2^+ - E_2^- \tag{11}$$

De manera análoga para la intensidad de campo magnético:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_1(z = -d) = \boldsymbol{\mathcal{H}}_2(z = -d) \tag{12}$$
$$Y_1 E_1^+ e^{jk_1 d} - Y_1 E_1^- e^{-jk_1 d} = Y_2 E_2^+ e^{jk_2 d} - Y_2 E_2^- e^{-jk_2 d} \tag{13}$$
$$Y_1 E_1^+(j) - Y_1 E_1^-(-j) = Y_2 E_2^+(j) - Y_2 E_2^-(-j) \tag{14}$$
$$Y_1 E_1^+ + Y_1 E_1^- = Y_2 E_2^+ + Y_2 E_2^- \tag{15}$$

Segunda condición de borde $z = 0$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_2(z = 0) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_3(z = 0) \tag{16}$$
$$E_2^+ e^{jk0} + E_2^- e^{-jk0} = E_3^+ e^{jk0} \tag{17}$$
$$E_2^+ + E_2^- = E_3^+ \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_2(z = 0) = \boldsymbol{\mathcal{H}}_3(z = 0) \tag{19}$$
$$Y_2 E_2^+ e^{jk0} - Y_2 E_2^- e^{-jk0} = Y_3 E_3^+ e^{jk0} \tag{20}$$
$$Y_2 E_2^+ - Y_2 E_2^- = Y_3 E_3^+ \tag{21}$$

Luego se obtienen las ecuaciones que nos permitirán obtener lo buscando, reemplazando E_3^+:

$$Y_2 E_2^+ - Y_2 E_2^- = Y_3 E_3^+ \tag{22}$$
$$Y_2 E_2^+ - Y_2 E_2^- = Y_3(E_2^+ + E_2^-) \tag{23}$$
$$Y_2 E_2^+ - Y_2 E_2^- = Y_3 E_2^+ + Y_3 E_2^- \tag{24}$$
$$E_2^+(Y_2 - Y_3) = E_2^-(Y_2 + Y_3) \tag{25}$$
$$E_2^+ = E_2^- \frac{(Y_2 + Y_3)}{(Y_2 - Y_3)} \tag{26}$$

Se tendrá por otro lado que:

$$\begin{aligned} E_1^+ - E_1^- &= E_2^+ - E_2^- && (27) \\ E_1^+ &= E_2^+ - E_2^- + E_1^- && (28) \\ & && (29) \end{aligned}$$

Luego reemplazando esta expresión en lo siguiente:

$$\begin{aligned} Y_1 E_1^+ + Y_1 E_1^- &= Y_2 E_2^+ + Y_2 E_2^- && (30) \\ Y_1(E_2^+ - E_2^- + E_1^-) + Y_1 E_1^- &= Y_2 E_2^+ + Y_2 E_2^- && (31) \\ Y_1 E_2^+ - Y_1 E_2^- + 2Y_1 E_1^- &= Y_2 E_2^+ + Y_2 E_2^- && (32) \\ & && (33) \end{aligned}$$

Dado que se busca el obtener explícitamente la expresión E_1^-, despejando en base a lo anterior se tendrá:

$$E_1^- = \frac{E_2^+(Y_2 - Y_1) + E_2^-(Y_1 + Y_2)}{2Y_1} \tag{34}$$

$$\tag{35}$$

Considerando la ecuación de borde obtenida con anterioridad:

$$E_2^+ = \frac{E_2^-(Y_2 + Y_3)}{(Y_2 - Y_3)} \tag{36}$$

Reemplazando la ecuación anterior en la expresión de E_1^- se tendrá:

$$E_1^- = \frac{E_2^- \left(\frac{(Y_2+Y_3)(Y_2-Y_1)}{(Y_2-Y_3)} + (Y_2 + Y_1) \right)}{2Y_1} \tag{37}$$

Finalmente se obtiene una expresión para E_1^- en términos de las variables conocidas.

(c) Se busca el analizar la situación en que $\epsilon_2 = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_3}$, por lo volviendo sobre la ecuación anterior.

$$E_1^- = \frac{E_2^- \left(\frac{(Y_2+Y_3)(Y_2-Y_1)}{(Y_2-Y_3)} + (Y_2 + Y_1) \right)}{2Y_1} \tag{38}$$

$$E_1^- = \frac{E_2^-((Y_2 + Y_3)(Y_2 - Y_1) + (Y_2 + Y_1)(Y_2 - Y_3))}{2Y_1(Y_2 - Y_3)} \tag{39}$$

Utilizando el hint del enunciado:

$$(b + c)(b - a) + (b + a)(b - c) = (b^2 - ac) \tag{40}$$

La exoresión queda reducida a:

$$E_1^- = \frac{E_2^-(Y_2^2 - Y_1 Y_3)}{2Y_1(Y_2 - Y_3)} \tag{41}$$

Luego tomando el numerador de la expresión anterior y recordando que la admitancia viene dada por $Y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$

$$Y_2^2 - Y_1Y_3 = \left(\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_0}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{\epsilon_1\epsilon_3}{\mu_0^2}}\right) \tag{42}$$

$$= \frac{\epsilon_2}{\mu_0} - \frac{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}}{\mu_0} \tag{43}$$

$$= \frac{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}}{\mu_0} - \frac{\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}}{\mu_0} \tag{44}$$

$$= 0 \tag{45}$$

Con lo que bajo la condición inicial se obtiene que $E_1^- = 0$, es decir que no se tendrá onda reflejada en el medio 1.

2. Considere una onda plana cuyo campo eléctrico tiene una magnitud E_0 (donde $E_0 = E_1^+$) y dirección $\widehat{\boldsymbol{x}}$, incidiendo normalmente en una sección de tres medios diferentes, siendo este último una placa dieléctrica perfecta adosada a un plano perfectamente conductor ($\sigma = \infty$), como se indica en la figura 2.
   (a) Obtenga una relación entre los campos E_2^- y E_2^+ en función de d_2.
   (b) Una vez determinada la expresión anterior, analice cuando $d_2 = \frac{\lambda}{2}$ y explique en términos del módulo del coeficiente de reflexión.
   (c) Considerando que $d_2 = \frac{\lambda}{2}$, determine una expresión para las amplitudes de los campos E_1^- y E_1^+ y analice el caso cuando $d_1 = \frac{\lambda}{2}$.
   (d) Considerando que $d_1 = d_2 = \frac{\lambda}{2}$, calcule el valor de potencia por unidad de área en el Medio 1 tanto para la onda incidente como para la reflejada.
   (e) ¿Son las potencias para la onda incidente y reflejada, obtenidas con anterioridad, diferentes? Argumente su respuesta.

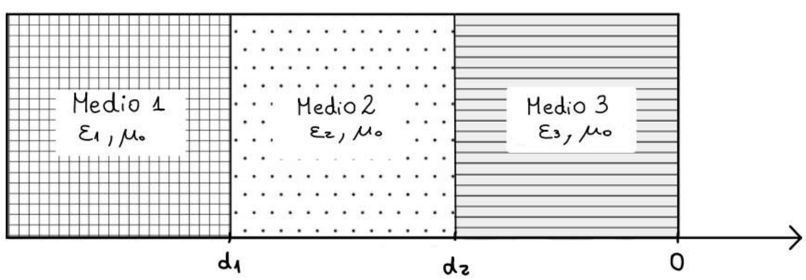

Figura 2: Tres medios con el último adosado a un plano perfectamente conductor.

Solución:

(a) Se busca obtener una relación para los campos E_2^- y E_2^+ en función de de d_2, por tanto las expresiones de los campos eléctricos y magnéticos en general para los diferentes medios corresponden:

Medio 1: z ≤ d1

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_1(z,t) = (E_1^+ e^{jwt} e^{-jk_1 z} + E_1^- e^{jwt} e^{jk_1 z})\widehat{\boldsymbol{x}} \tag{46}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_1 = Y_1(\widehat{\boldsymbol{z}}) \times \boldsymbol{\mathcal{E}}_1 \widehat{\boldsymbol{x}} \tag{47}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_1 = Y_1(E_1^+ e^{jwt} e^{-jk_1 z} - E_1^- e^{jwt} e^{jk_1 z})\widehat{\boldsymbol{y}} \tag{48}$$

Medio 2: d_1 ≤ z ≤ d_2

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_2(z,t) = (E_2^+ e^{jwt} e^{-jk_2 z} + E_2^- e^{jwt} e^{jk_2 z})\widehat{\boldsymbol{x}} \tag{49}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_2 = Y_2(\widehat{\boldsymbol{z}}) \times \boldsymbol{\mathcal{E}}_2 \widehat{\boldsymbol{x}} \tag{50}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_2 = Y_2(E_2^+ e^{jwt} e^{-jk_2 z} - E_2^- e^{jwt} e^{jk_2 z})\widehat{\boldsymbol{y}} \tag{51}$$

Medio 3: d2 ≤ z ≤ 0

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_3(z,t) = (E_3^+ e^{jwt} e^{-jk_3 z} + E_3^- e^{jwt} e^{jk_3 z})\widehat{\boldsymbol{x}} \tag{52}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_3 = Y_3(\widehat{\boldsymbol{z}}) \times \boldsymbol{\mathcal{E}}_3 \widehat{\boldsymbol{x}} \tag{53}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_3 = Y_3(E_3^+ e^{jwt} e^{-jk_3 z} - E_3^- e^{jwt} e^{jk_3 z})\widehat{\boldsymbol{y}} \tag{54}$$

Con lo que finalmente se obtienen las expresiones de campo eléctrico y intensidad magnetica para los 3 medios, el 4 es despreciable debido a la presencia de una pared con conductividad infinita (Reflexión total). Luego queremos relacionar E_2^+ y E_2^-, es por esto que evaluaremos en la interfaz de los medios 2 y 3:

Interfaz medio 2 y 3 (campo eléctrico)

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_2(z = -d_2) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_3(z = -d_2) \tag{55}$$

Reemplazando y teniendo la consideración con los signos se tendrá que:

$$(E_2^+ e^{jwt} e^{jk_2 d_2} + E_2^- e^{jwt} e^{-jk_2 d_2}) = (E_3^+ e^{jwt} e^{jk_3 d_2} + E_3^- e^{jwt} e^{-jk_3 d_2}) \tag{56}$$

A partir de ahora omitiremos en todas las expresiones los términos fasoriales asociados a el tiempo e^{jwt} dado que no cambia con los cambios de medios por lo que no sera relevante.

$$(E_2^+ e^{jk_2 d_2} + E_2^- e^{-jk_2 d_2}) = (E_3^+ e^{jk_3 d_2} + E_3^- e^{-jk_3 d_2}) \tag{57}$$

Necesitamos eliminar la dependencia de las amplitudes asociadas al medio 3, por lo que evaluando en z=0, tenemos que:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_3(z = 0, t) = (E_3^+ e^{-jk_3 \cdot 0} + E_3^- e^{jk_3 \cdot 0}) = 0 \tag{58}$$
$$= E_3^+ + E_3^- = 0 \tag{59}$$
$$E_3^+ = -E_3^- \tag{60}$$

Recordemos que lo igualamos a 0, debido a la conductividad infinita de la interfaz y por tanto la no existencia de onda en el otro medio. Reemplazando esta condición sobre lo anterior:

$$(E_2^+ e^{jk_2 d_2} + E_2^- e^{-jk_2 d_2}) = (E_3^+ e^{jk_3 d_2} + E_3^- e^{-jk_3 d_2}) \tag{61}$$
$$(E_2^+ e^{jk_2 d_2} + E_2^- e^{-jk_2 d_2}) = E_3^+ (e^{jk_3 d_2} - e^{-jk_3 d_2}) \tag{62}$$
$$(E_2^+ e^{jk_2 d_2} + E_2^- e^{-jk_2 d_2}) = 2E_3^+ j \sin(k_3 d_2) \tag{63}$$

Con lo que reducimos a solo tener un E_3^+, con lo que debemos relacionar alguna otra expresión para reducirlo, usando la intensidad de campo magnético de la siguiente manera:

Interfaz medio 2 y 3 (campo magnético)

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_2(z=-d_2) = \boldsymbol{\mathcal{H}}_3(z=-d_2) \tag{64}$$
$$Y_2(E_2^+ e^{-jk_2 z} - E_1^- e^{jk_2 z}) = Y_3(E_3^+ e^{-jk_3 z} - E_3^- e^{jk_3 z}) \tag{65}$$

Utilizamos la misma condición que obtuvimos de antes (Es decir que $E_3^+ = -E_3^-$):

$$Y_2(E_2^+ e^{-jk_2 z} - E_1^- e^{jk_2 z}) = Y_3 E_3^+ (e^{-jk_3 z} + e^{jk_3 z}) \tag{66}$$
$$Y_2(E_2^+ e^{-jk_2 z} - E_1^- e^{jk_2 z}) = Y_3 2 E_3^+ \cos(k_3 d_2) \tag{67}$$

Luego realizando la división se observa que queda expresada solo en términos de E_2^+ y E_2^- con lo que podemos relacionarlos en función de parámetros conocidos, es decir:

$$\frac{(E_2^+ e^{jk_2 d_2} + E_2^- e^{-jk_2 d_2})}{Y_2(E_2^+ e^{-jk_2 z} - E_1^- e^{jk_2 z})} = \frac{j\tan(k_3 d_2)}{Y_3} \tag{68}$$

Luego despejando se logra obtener que

$$E_2^- = E_2^+ \frac{e^{jk_2 d_2}\left(\frac{Y_2}{Y_3} j\tan(k_3 d_2) - 1\right)}{e^{-jk_2 d_2}\left(1 + \frac{Y_2}{Y_3} j\tan(k_3 d_2)\right)} \tag{69}$$

Con lo que finalmente se obtiene una expresión que relaciona los campos solo en función de la distancia d_2

(b) Se desea analizar la expresión anterior cuando $d_2 = \frac{\lambda}{2}$, por lo que evaluando de manera directa se tendrá:

$$E_2^- = E_2^+ \frac{e^{jk_2 \cdot \frac{\lambda}{2}}\left(\frac{Y_2}{Y_3} j\tan(k_3 \cdot \frac{\lambda}{2}) - 1\right)}{e^{-jk_2 \cdot \frac{\lambda}{2}}\left(1 + \frac{Y_2}{Y_3} j\tan(k_3 \cdot \frac{\lambda}{2})\right)} \tag{70}$$

Luego teniendo en consideración que:

$$e^{\pm jk_2 d_2} = e^{\pm j\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2}} = e^{\pm j\pi} = (-1) \tag{71}$$
$$j\tan(k_3 d_2) = j\tan(\pi) = 0 \tag{72}$$

Relacionándolo con lo anterior sigue que:

$$E_2^- = E_2^+ \frac{-1\left(\frac{Y_2}{Y_3}\cdot 0 - 1\right)}{-1\left(1 + \frac{Y_2}{Y_3}\cdot 0\right)} \tag{73}$$
$$E_2^- = -E_2^+ \tag{74}$$

Con lo que tenemos un efecto similar al de una pared con conductividad infinita. Así calculamos el coeficiente de reflexión:

$$\Gamma = \frac{E_2^-}{E_2^+} e^{-2jk_2 d_2} \tag{75}$$
$$= (-1) \tag{76}$$

Donde si evaluamos obtenemos a priori lo que se esperaba el tener el efecto de una pared con conductividad infinita, esto principalmente porque tenemos amplitudes iguales solo con signos opuestos y por lo tanto tendremos además una reflexión con un desfase de $\pm\,\pi$.

(c) Se busca relacionar las amplitudes para el medio 1 considerando la misma distancia para ($d_2 = \lambda/4$) y relacionarlo con lo obtenido con anterioridad. Es directo ver que tenemos el mismo análisis anterior (Un error común es volver a calcularlo y perder mucho tiempo), por lo que directamente tenemos que:

$$E_1^- = E_1^+ \frac{e^{jk_1d_1}\left(\frac{Y_1}{Y_2}j\tan(k_2d_1) - 1\right)}{e^{-jk_1d_1}\left(1 + \frac{Y_1}{Y_2}j\tan(k_2d_1)\right)} \tag{77}$$

Con lo que tenemos para $d_1 = d_2 = \frac{\lambda}{2}$

$$E_1^- = -E_1^+ = -E_0 \tag{78}$$

Recordando que la amplitud de la onda incidente es conocida

(d) Luego buscamos obtener si las potencias de la onda incidente y reflejada son iguales bajo las condiciones anteriores, con lo tenemos lo siguiente:

$$\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle = \frac{1}{2}Re(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^*) = \frac{1}{2}(E_1^+)^2 Y_1 \widehat{\boldsymbol{z}} \tag{79}$$

$$\langle \mathbf{S}_1^- \rangle = \frac{1}{2}Re(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^*) = \frac{1}{2}(E_1^-)^2 Y_1 \widehat{\boldsymbol{z}} \tag{80}$$

En base a lo anterior se tendrá que $E_1^+ = -E_1^- = -E_0$, pero dado que tenemos la expresión cuadrado, se observa finalmente que:

$$\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle = \langle \mathbf{S}_1^- \rangle \tag{81}$$

Lo cual es consistente con la intuición.