Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Electromagnetismo Aplicado (EL3103)
Clase auxiliar 6
Prof. Tomás Cassanelli
Prof. Gonzalo Narváez
Ayudantes: Bruno Pollarolo - Joaquín Díaz

1 Resumen: Conceptos de ondas

Es importante el recordar que los campos eléctricos y magnéticos pueden ser representados mediante ecuaciones de onda. Utilizando las ecuaciones de Maxwell se tiene:

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} \tag{1}$$

Luego la ecuación (1) se utilizará en lo siguiente. Utilizando las propiedades de los operadores se tendrá:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}) - \nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) = -\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{3}$$

$$\nabla \times \left(\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}\right) = -\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{4}$$

$$\epsilon_0\mu_0 \left(\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}\right) = -\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{5}$$

$$\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}}) = -\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{6}$$

$$\epsilon_0\mu_0 \left(-\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t}\right) = -\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{7}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

Con lo que se logra obtener la ecuación de onda que permite describir el campo magnético, es importante notar que $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ con c la velocidad de la luz. De manera análoga para el campo eléctrico se tendrá:

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{E}} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

<u>Constante de propagación</u>: La constante de propagación describe cómo las ondas electromagnéticas se propagan y se atenúan a medida que atraviesan el medio, donde existen dos parámetros de interés

- α: Atenuación del campo electromagnético en el medio. Es la parte real de la constante de propagación.
- $j\beta$: Componente imaginaria de la constante de propagación. Está asociado con la variación espacial de la onda y se mide en radianes por unidad de longitud.

La expresión completa viene caracterizada por:

$$\gamma = jk = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon' \left(1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)} \tag{10}$$

Para la gran mayoría de ejercicios se considerara que los campos eléctricos y magnéticos son perpendiculares a la dirección de propagación y por tanto son representados tal que:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = E_{inc}e^{(\alpha - j\beta)}E^{j\omega t} + E_{ref}e^{(\alpha + j\beta)}E^{j\omega t} \tag{11}$$

Donde se tendrá una onda incidente E_{inc} (proveniente de alguna fuente) y una onda reflejada E_{ref} (producto del cambio de medio), así como una posible onda transmitida que continuará en el otro medio, en caso de existir. Además, debemos considerar que la propagación es en la dirección $\widehat{\boldsymbol{k}}$. Sabemos que, debido a la notación fasorial, podemos expresar el rotor del campo eléctrico como:

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -j\omega\mu_0\boldsymbol{\mathcal{H}} \tag{12}$$

Lo que permite obtener el campo $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ en función de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ como:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = Y\widehat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{13}$$

Donde Y representa la admitancia del medio, la cual viene dada por:

$$\begin{aligned} Y &= Y_0\sqrt{\epsilon_r} && (14)\\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_{medio}}{\mu_0}} && (15) \end{aligned}$$

Es importante recordar las expresiones asociadas a las condiciones de borde así como de Potencia y energía para los próximos ejercicios. Además de las siguientes identidades:

$$\sin(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \qquad \cos(z) = \frac{e^{jz} + e^{jz}}{2} \tag{16}$$

También se ocupará la siguiente relación entre la exponencial el seno y el coseno para simplificar las expresiones:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \tag{17}$$

Fórmula vector de Poynting: La densidad de potencia promedio en un medio es dada por:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}\text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \tag{18}$$

1. Considere una onda plana en la figura 1, cuyo campo eléctrico tiene una magnitud E_0 (refiriendose a la amplitud $E_0 = E_1^+$) y dirección $\widehat{\boldsymbol{i}}$, incidiendo normalmente en una placa dieléctrica perfecta adosada a un plano perfectamente conductor, como se indica la figura. Además considere que la frecuencia de operación es f_0 y el espesor de la placa dieléctrica es d = $\lambda/4$, donde λ es la longitud de onda dentro del dieléctrico.
   (a) Determine los campos totales $\boldsymbol{\mathcal{E}}(z)$ y $\boldsymbol{\mathcal{H}}(z)$ en todas partes. Además, bosqueje $\|\boldsymbol{\mathcal{E}}(z)\|$ y $\|\boldsymbol{\mathcal{H}}(z)\|$.
   (b) Determine el coeficiente de reflexión $\Gamma(z)$ en z=-d
   (c) Determine la densidad de potencia (Por unidad de área en el plano xy) incidente y reflejada para cualquier z<-d.

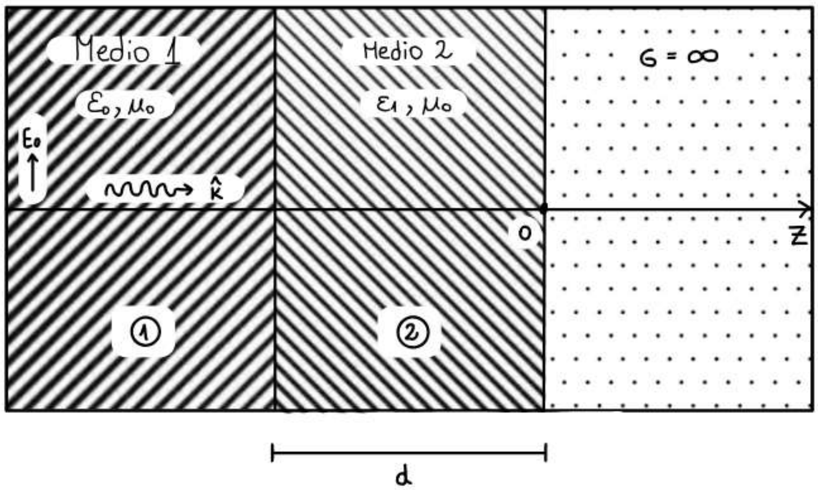


Figura 1: Placa dieléctrica de dos medios.

Solución:

(a) Se busca el obtener los campos $\boldsymbol{\mathcal{E}}(z)$ y $\boldsymbol{\mathcal{H}}(z)$ en todos los medios, se tendrá que analizar en cada uno de estos, además de analizar sus condiciones de borde:

Campo eléctrico Medio 1

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_1(z) = (E_1^+ e^{jw_o t} e^{-jk_0 z} + E_1^- e^{jw_o t} e^{jk_0 z})\widehat{\boldsymbol{i}} \tag{19}$$

Campo eléctrico Medio 2

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_2(z) = (E_2^+ e^{jw_o t} e^{-jk_1 z} + E_2^- e^{jw_o t} e^{jk_1 z})\widehat{\boldsymbol{i}} \tag{20}$$

Luego buscamos analizar las condiciones de borde por tanto se considera los casos en que z = -d y z = 0.

Caso 1 $\boldsymbol{\mathcal{E}}_1(z = -d) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_2(z = -d)$

Sabemos por condiciones de borde, que dichos campos eléctricos en la interfaz deberán ser iguales, por lo que igualando se tiene que:

$$(E_1^+ e^{jw_o t} e^{jk_0 d} + E_1^- e^{jw_o t} e^{-jk_0 d}) = (E_2^+ e^{jw_o t} e^{jk_1 d} + E_2^- e^{jw_o t} e^{-jk_1 d}) \tag{21}$$

Notamos que la componente asociada a la frecuencia puede ser eliminada, por lo que reduciendo la expresión (Muchas veces la omitiremos por el mismo motivo dado que entre medios su variante temporal debe ser la misma).

$$(E_1^+ e^{jk_0 d} + E_1^- e^{-jk_0 d}) = (E_2^+ e^{jk_1 d} + E_2^- e^{-jk_1 d}) \tag{22}$$

Esta expresión, la ocuaremos luego para obtener las relaciones entre las amplitudes de los campos eléctricos, primero ocuparemos la condicion de borde en z=0.

Caso 2 $\boldsymbol{\mathcal{E}}_2(z=0) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_3(z=0)$

Se tendrá una condición de conductividad infinita, eso implicara que no existirá onda transmitida y por lo tanto se tendrá directamente que $E_3 = 0$, es decir:

$$(E_2^+ e^{jw_o t} e^{-jk_1 \cdot 0} + E_2^- e^{jw_o t} e^{jk_1 \cdot 0}) = E_3 = 0 \tag{23}$$

$$E_2^+ + E_2^- = 0 \tag{24}$$

$$E_2^+ = -E_2^- \tag{25}$$

Lo cual es consistente con el hecho de que no se esta transmitiendo campo eléctrico en el medio 3, por lo que las amplitudes incidente y reflejada deben ser iguales y por tanto no existe perdida. Luego deberemos obtener mas ecuaciones para poder encontrar las expresiones particulares de los campos eléctricos, esto se logra relacionando las ecuaciones de intensidad magnética, y teniendo en consideración que son perpendiculares:

Intensidad de campo magnético para ambos medios

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_1 = Y_0(\widehat{\boldsymbol{k}}) \times (E_1^+ e^{jw_o t} e^{-jk_0 z})(\widehat{\boldsymbol{i}}) + Y_0(-\widehat{\boldsymbol{k}}) \times (E_1^- e^{jw_o t} e^{jk_0 z})(\widehat{\boldsymbol{i}}) \tag{26}$$

Dado que sabemos que la propagación va en $\widehat{\boldsymbol{z}}$, luego se tendrá que H deberá ir en $\widehat{\boldsymbol{j}}$, lo cual es consistente con la expresión anterior:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_1 = (Y_0 E_1^+ e^{jw_o t} e^{-jk_0 z} - Y_0 E_1^- e^{jw_o t} e^{jk_0 z})(\widehat{\boldsymbol{j}}) \tag{27}$$

Análogamente se tiene que para el medio 2

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_2 = (Y_1 E_2^+ e^{jw_o t} e^{-jk_1 z} - Y_1 E_2^- e^{jw_o t} e^{jk_1 z})(\widehat{\boldsymbol{j}}) \tag{28}$$

Bajo el mismo argumento anterior tendremos que las intensidades de campo magnético deberán ser iguales y por lo tanto:

Caso 2 $\boldsymbol{\mathcal{H}}_1(z=-d) = \boldsymbol{\mathcal{H}}_2(z=-d)$ Utilizando la igualdad se obtiene que:

$$(Y_0 E_1^+ e^{jk_0 d} - Y_0 E_1^- e^{-jk_0 d}) = (Y_1 E_2^+ e^{jk_1 d} - Y_1 E_2^- e^{-jk_1 d}) \tag{29}$$

$$Y_0(E_1^+ e^{jk_0 d} - E_1^- e^{-jk_0 d}) - Y_1(E_2^+ e^{jk_1 d} - E_2^- e^{-jk_1 d}) = 0 \tag{30}$$

Dada la expresión general, nos enfocaremos en el caso particular d= $\lambda/4$, por lo que reemplazando sobre las ecuaciones anteriores y recordando que:

$$k = \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{31}$$

Luego

$$d \cdot k = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \tag{32}$$

Por lo que tenemos que:

$$e^{\pm j \frac{\pi}{2}} = \pm j \tag{33}$$

Por lo que reemplazando en la ecuación (22) (con la relación de los campos eléctricos) se obtiene:

$$E_1^+ j - E^- j = E_2^+ j - E_2^- j \tag{34}$$
$$E_1^+ - E^- = E_2^+ - E_2^- \tag{35}$$

Pero anteriormente se verifico que $E_2^- = -E_2^+$, por lo que reemplazando tenemos:

$$E_1^+ - E_1^- = 2E_2^+ \tag{36}$$

Por otro lado tenemos que para la intensidad de campo magnético y evaluando el valor obtenido para las exponenciales complejas en z = d, se tiene que:

$$Y_0(E_1^+ e^{jk_0 d} - E_1^- e^{-jk_0 d}) = Y_1(E_2^+ e^{jk_1 d} - E_2^- e^{-jk_1 d}) \tag{37}$$
$$Y_0(E_1^+ j + E_1^- j) = Y_1(E_2^+ j + E_2^- j) \tag{38}$$
$$Y_0(E_1^+ + E_1^-) = Y_1(E_2^+ + E_2^-) \tag{39}$$
$$Y_0(E_1^+ + E_1^-) = Y_1(E_2^+ + E_2^-) = 0 \tag{40}$$
$$E_1^+ = -E_1^- \tag{41}$$

Tenemos además que $E_1^+ = E_0$ por lo tanto:

$$E_0 = -E_1^- \tag{42}$$

De esta forma,

$$E_1^+ - E_1^- = 2E_2^+ \tag{43}$$
$$E_0 + E_0 = 2E_2^+ \tag{44}$$
$$E_0 = E_2^+ \tag{45}$$

Finalmente los campos serán de la siguiente forma (Utilizaremos las expresiones de seno y coseno vistas en el resumen):

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_1(z) = E_0 e^{-jk_0 z} + E_1^- e^{jk_0 z} \tag{46}$$
$$= E_0 e^{-jk_0 z} - E_0^- e^{jk_0 z} \tag{47}$$
$$= E_0(e^{-jk_0 z} - e^{jk_0 z}) \tag{48}$$
$$= -2jE_0 \sin(k_0 z) \tag{49}$$

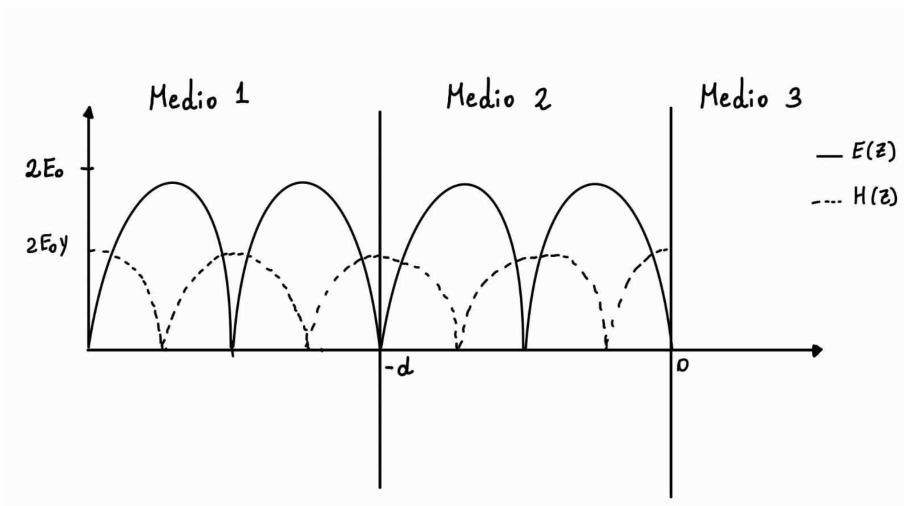
$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_2(z) = E_2^+ e^{-jk_1 z} + E_2^- e^{jk_1 z} \tag{50}$$
$$= E_2^+ e^{-jk_1 z} - E_2^+ e^{jk_1 z} \tag{51}$$
$$= E_2^+(e^{-jk_1 z} - e^{jk_1 z}) \tag{52}$$
$$= -2jE_0 \sin(k_1 z) \tag{53}$$

Por otro lado para la intensidad de campo magnético tenemos que:

$$\mathcal{H}_1(z) = Y_0E_1^+e^{-jk_0z} - Y_0E_1^-e^{jk_0z} \tag{54}$$
$$= Y_0E_0^+e^{-jk_0z} + Y_0E_0^-e^{jk_0z} \tag{55}$$
$$= Y_0E_0(e^{-jk_0z} + e^{jk_0z}) \tag{56}$$
$$= 2Y_0E_0\cos(k_0z) \tag{57}$$

$$\mathcal{H}_2(z) = Y_1E_2^+e^{-jk_1z} - Y_1E_2^-e^{jk_1z} \tag{58}$$
$$= Y_1E_2^+e^{-jk_0z} + Y_1E_2^-e^{jk_0z} \tag{59}$$
$$= Y_1E_0(e^{-jk_0z} + e^{jk_0z}) \tag{60}$$
$$= 2Y_1E_0\cos(k_1z) \tag{61}$$

Con lo que se obtienen finalmente los campos $\mathcal{E}(z,t)$ y $\mathcal{E}(z,t)$ para ambos medios, luego graficando tenemos lo siguiente:



(b) Se busca determinar el coeficiente de reflexión en Γ,lo obtendremos de manera general (Es posible obtenerlo directamente de lo visto anteriormente, pero por completitud se obtendrá la expresión general), por lo que volviendo sobre las ecuaciones anteriores:

$$(E_1^+e^{jk_0d} + E_1^-e^{-jk_0d}) = (E_2^+e^{jk_1d} + E_2^-e^{-jk_1d}) \tag{62}$$

De las relaciones anteriores se obtiene ($E_2^- = E_2^+$),

$$(E_1^+e^{jk_0d} + E_1^-e^{-jk_0d}) = (E_2^+e^{jk_1d} + E_2^-e^{-jk_1d}) \tag{63}$$
$$= 2jE_2^+\sin(k_1d) \tag{64}$$
$$(E_1^+e^{jk_0d} + E_1^-e^{-jk_0d}) = 2jE_2^+\sin(k_1d) \tag{65}$$

En relación a la intensidad de campo magnético.

$$Y_0E_0e^{jk_0d} - Y_0E_1^-e^{-jk_od} = 2YE_2^+\cos(k_1d) \tag{66}$$

Recordemos que el coeficiente de reflexión vendrá dado por

$$\Gamma(z) = \frac{E_1^- e^{-jk_o z}}{E_1^+ e^{jk_o z}} \tag{67}$$

$$= \frac{E_1^-}{E_1^+} e^{-j2k_0 d} \tag{68}$$

Es por esto que nos interesa dejar esta relación en términos de expresiones conocidas, en particular de E_1^- con respecto a $E_0 = E_1^+$, por lo que debemos despejar el termino reflejado (E_1^-) dividiendo las ecuaciones anteriores, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{E_1^+ e^{jk_0 d} + E_1^- e^{-jk_0 d}}{Y_0(E_0 e^{jk_0 d} - E_1^- e^{-jk_o d})} = \frac{1}{Y_1} jtan(k_1 d) \tag{69}$$

Luego despejando E_1^- tendremos la siguiente expresión:

$$E_1^- = E_0 e^{j2k_0 d} \frac{\left(\frac{Y_0}{Y_1} jtg(k_1 d) - 1\right)}{\left(\frac{Y_0}{Y_1} jtg(k_1 d) + 1\right)} \tag{70}$$

Que reemplazando sobre la ecuación del coeficiente de reflexión:

$$\Gamma(z = d) = \frac{\left(\frac{Y_0}{Y_1} jtg(k_1 d) - 1\right)}{\left(\frac{Y_0}{Y_1} jtg(k_1 d) + 1\right)} \tag{71}$$

Donde utilizando la siguiente relación:

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} \qquad\qquad Y_1 = \frac{1}{Z_1} \tag{72}$$

Tal que la expresión:

$$\Gamma(z = d) = \frac{jZ_1 tg(k_1 d) - Z_0}{jZ_1 tg(k_1 d) + Z_0} \tag{73}$$

Se obtiene una expresión muy útil que se utilizara mas adelante *(En la siguiente unidad)*, y nos da una expresión que permite obtener el coeficiente de reflexión en cualquier punto que sea de interés, por ahora nos reduciremos a evaluarla en $d = \lambda/4$ por lo que se obtiene:

$$\Gamma(z = \frac{\lambda}{4}) = \frac{jZ_1 tg(k_1 \frac{\lambda}{4}) - Z_0}{jZ_1 tg(k_1 \frac{\lambda}{4}) + Z_0} \tag{74}$$

$$= 1 \tag{75}$$

Luego, tendremos que cuando $d = \frac{\lambda}{4}$, el modulo de las amplitudes del campo reflejado y transmitido son iguales y en la misma fase con respecto a la onda incidente.

(c) Se busca obtener la densidad de potencia (Por unidad de área en plano xy) por tanto se utilizara el vector de Poynting tal que:

$$P_1^+ = \frac{1}{2} Re(E_1 \times H_1^*) \hat{k} \tag{76}$$

$$= \frac{1}{2} Re(E_0 e^{-jk_0 z} \times Y_1 E_0 e^{jk_0 z}) \tag{77}$$

$$= \frac{1}{2} Re(E_0^2 Y_0) \tag{78}$$

$$= \frac{1}{2} E_0^2 Y_0 \tag{79}$$

De manera similar tenemos que para la potencia reflejada:

$$P_1^- = \frac{1}{2} Re(E_1^- \times H_1^- *)(-\hat{k}) = \frac{1}{2} Y_0 E_0^2 \tag{80}$$