Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Electromagnetismo Aplicado (EL3103)
Clase auxiliar 6
Prof. Tomás Cassanelli
Prof. Gonzalo Narváez
Ayudantes: Bruno Pollarolo - Joaquín Díaz

1 Resumen: Conceptos de ondas

Es importante el recordar que los campos eléctricos y magnéticos pueden ser representados mediante ecuaciones de onda. Utilizando las ecuaciones de Maxwell se tiene:

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} \tag{1}$$

Luego la ecuación (1) se utilizará en lo siguiente. Utilizando las propiedades de los operadores se tendrá:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}) - \nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) = -\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{3}$$

$$\nabla \times \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{4}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \left(\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{5}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}}) = -\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{6}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \left(-\frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{7}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{B}} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

Con lo que se logra obtener la ecuación de onda que permite describir el campo magnético, es importante notar que $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ con c la velocidad de la luz. De manera análoga para el campo eléctrico se tendrá:

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{E}} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

Constante de propagación: La constante de propagación describe cómo las ondas electromagnéticas se propagan y se atenúan a medida que atraviesan el medio, donde existen dos parámetros de interés

- α: Atenuación del campo electromagnético en el medio. Es la parte real de la constante de propagación.
- $j\beta$: Componente imaginaria de la constante de propagación. Está asociado con la variación espacial de la onda y se mide en radianes por unidad de longitud.

La expresión completa viene caracterizada por:

$$\gamma = jk = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{\mu \epsilon' \left(1 - j \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)} \tag{10}$$

Para la gran mayoría de ejercicios se considerara que los campos eléctricos y magnéticos son perpendiculares a la dirección de propagación y por tanto son representados tal que:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = E_{inc}e^{(\alpha - j\beta)}E^{j\omega t} + E_{ref}e^{(\alpha + j\beta)}E^{j\omega t} \tag{11}$$

Donde se tendrá una onda incidente E_{inc} (proveniente de alguna fuente) y una onda reflejada E_{ref} (producto del cambio de medio), así como una posible onda transmitida que continuará en el otro medio, en caso de existir. Además, debemos considerar que la propagación es en la dirección $\widehat{\boldsymbol{k}}$. Sabemos que, debido a la notación fasorial, podemos expresar el rotor del campo eléctrico como:

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -j\omega\mu_0\boldsymbol{\mathcal{H}} \tag{12}$$

Lo que permite obtener el campo $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ en función de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ como:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = Y\widehat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{13}$$

Donde Y representa la admitancia del medio, la cual viene dada por:

$$Y = Y_0\sqrt{\epsilon_r} \tag{14}$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon_{medio}}{\mu_0}} \tag{15}$$

Es importante recordar las expresiones asociadas a las condiciones de borde así como de Potencia y energía para los próximos ejercicios. Además de las siguientes identidades:

$$\sin(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \qquad \cos(z) = \frac{e^{jz} + e^{jz}}{2} \tag{16}$$

También se ocupará la siguiente relación entre la exponencial el seno y el coseno para simplificar las expresiones:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \tag{17}$$

Fórmula vector de Poynting: La densidad de potencia promedio en un medio es dada por:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \tag{18}$$

1. Considere una onda plana en la figura 1, cuyo campo eléctrico tiene una magnitud E_0 (refiriendose a la amplitud $E_0 = E_1^+$) y dirección $\widehat{\boldsymbol{i}}$, incidiendo normalmente en una placa dieléctrica perfecta adosada a un plano perfectamente conductor, como se indica la figura. Además considere que la frecuencia de operación es f_0 y el espesor de la placa dieléctrica es d $= \lambda/4$, donde λ es la longitud de onda dentro del dieléctrico.

   (a) Determine los campos totales $\boldsymbol{\mathcal{E}}(z)$ y $\boldsymbol{\mathcal{H}}(z)$ en todas partes. Además, bosqueje $\|\boldsymbol{\mathcal{E}}(z)\|$ y $\|\boldsymbol{\mathcal{H}}(z)\|$.

   (b) Determine el coeficiente de reflexión $\Gamma(z)$ en z=-d

   (c) Determine la densidad de potencia (Por unidad de área en el plano xy) incidente y reflejada para cualquier z<-d.

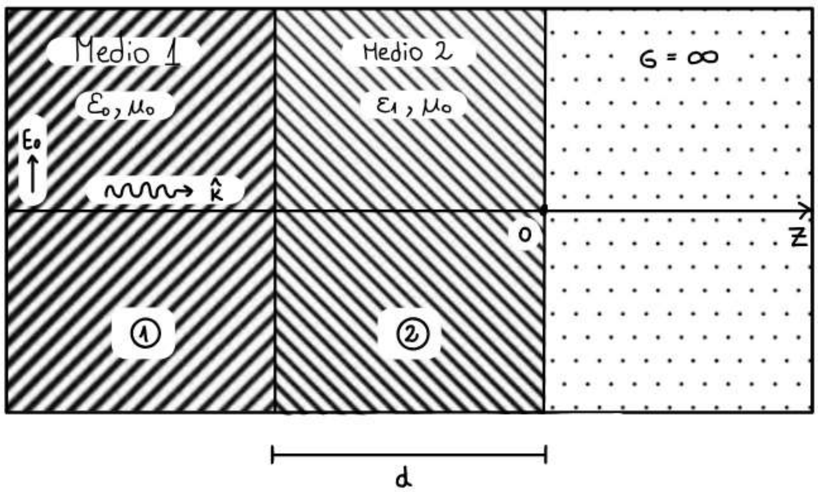

Figura 1: Placa dieléctrica de dos medios.