Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Electromagnetismo Aplicado (EL3103)
Clase auxiliar 2
Prof. Tomás Cassanelli
Prof. Gonzalo Narváez
Ayudantes: Bruno Pollarolo - Joaquín Díaz

1 Introducción

Se definirá dos expresiones fundamentales para el desarrollo de los problemas posteriores. Estas corresponden a la ecuación de **Poisson** y **Laplace**. Siendo la primera la más general expresada de la siguiente manera:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

Donde V lo denominaremos como el potencial y ρ la densidad de carga. Es importante tener en cuenta que esta carga considera tanto la densidad de **carga libre** como la **ligada**. Sea el caso en que no se tenga una densidad de carga en los medios a evaluar esta ecuación es posible reducirla a la denominada Ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \tag{2}$$

La cual permite obtener una expresión para el potencial V según sea la geometría y coordenadas a utilizar. Además, presenta las siguientes características:

- El potencial posee solo una solución y es única.
- El potencial no tolera mínimos ni máximos locales y el valor en cierto punto del espacio es el promedio de los valores en la frontera.
- La solución es una función armónica.
- La ecuación cumple con la condición de linealidad.

Existen muchos métodos de resolución de estas ecuación, los cuales se irán viendo a lo largo de los ejercicios.

Es importante utilizar las ecuaciones de Maxwell ya que, en base a los conceptos matemáticos será posible entender qué buscan expresar. Estas vienen dadas por:

$$\text{(i)} \quad \boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}} = \rho_f} \qquad \text{(iii)} \quad \boxed{\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t}} \tag{3}$$

$$\text{(ii)} \quad \boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0} \qquad \text{(iv)} \quad \boxed{\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{J}}_f + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t}} \tag{4}$$

Además, se tendrán condiciones de borde que serán de utilidad para encontrar relaciones entre ecuaciones:

1. Campos eléctrico tangencial $\boldsymbol{\mathcal{E}}_1^{\parallel} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_2^{\parallel}$
2. Desplazamiento eléctrico normal $\mathcal{D}_1^{\perp} - \mathcal{D}_2^{\perp} = \sigma$

3. Intensidad de campo tangencial $\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\parallel} - \boldsymbol{\mathcal{H}}_2^{\parallel} = \kappa$
4. Campo magnético normal: $\mathcal{B}_1^{\perp} = \mathcal{B}_2^{\perp}$

Donde para la mayoría de casos se tendrá que la corriente superficial (κ) y la densidad de carga superficial (σ) se despreciará por simplificación.

Consejo para la resolución de problemas

- Recordar las expresiones de los campos eléctricos, potenciales, cargas, etc. vistos en electromagnetismo.
- Analizar la geometría del esquema y ver si es posible utilizar Laplace.
- Verificar qué tipo de coordenadas son acordes al problema.
- Es fundamental analizar la dirección del potencial eléctrico, dado que este nos dará la respuesta a qué tipo de coordenada/s dependerá este.
- Ver cuántos medios dispone el problema y separar por escenarios cada uno de estos.
- Analizar el problema para obtener las ecuaciones que hagan falta, esto para despejar las constantes, que luego nos permitan obtener una expresión para el potencial y el campo eléctrico.
- Ver si es posible aplicar condiciones de borde para el punto anterior.

2 Ejercicios

1. Para la estructura coaxial de la figura 1, de longitud d y diferencia de potencial V_0 entre los electrodos en $r = a$ y $r = c$, determinar:
   (a) Potencial $V(r)$ y campo E en los medios dieléctricos perfectos de permisividad ϵ_1 y ϵ_2.
   (b) Carga total Q en cada uno de los electrodos del condensador (demuestre que la magnitud es igual).
   (c) Energía acumulada en cada medio dieléctrico.

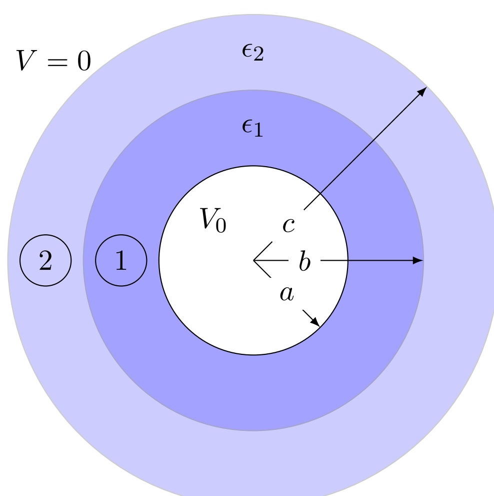

Figura 1: Estructura coaxial de pregunta 1.

2. Para el dispositivo magnético de la figura 2 con dos materiales de permeabilidad μ_1 y μ_2 y con $\mu \to \infty$ en el resto del dispositivo, con espesores d_1 y d_2 y sección transversal circular de radio a, determinar:
   (a) Potencial magnético escalar $V_m(z)$ en los medios 1, 2 y los campos H_1 y H_2.
   (b) Inductancia L del enrollado.
   (c) Energía magnética acumulada W_m en los medios 1 y 2.

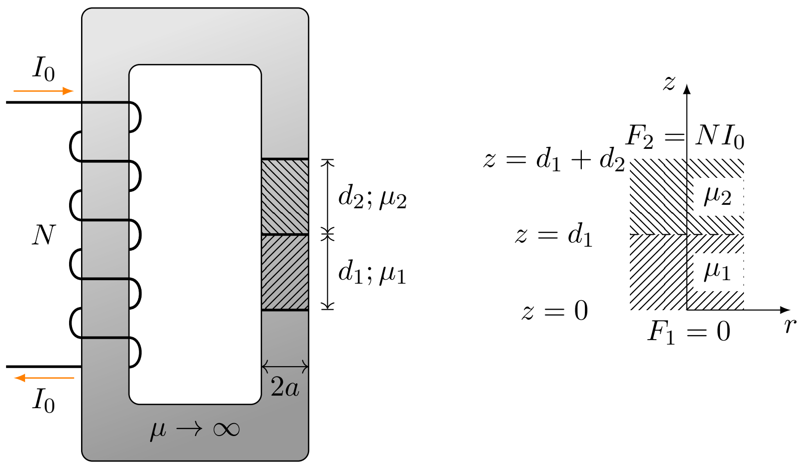

Figura 2: Transformador, pregunta 2.

3. Considere un cable coaxial infinitamente largo, portador de una corriente I uniformemente distribuida en el conductor interior y una corriente $-I$ en el conductor exterior (ver figura 3).
   (a) Encuentre el campo $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ en todo el espacio.
   (b) Determine el flujo magnético en el dieléctrico (μ_0, ϵ) y la energía acumulada en el campo magnético, por unidad de longitud.

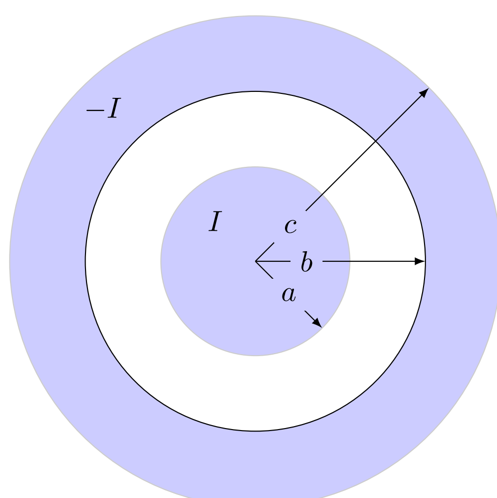

Figura 3: Estructura coaxial de la pregunta 3.