



Antes de adentrarnos en los temas relacionados al electromagnetismo aplicado, es de suma importancia destacar algunas nociones y operadores matemáticos que serán utilizados a lo largo del curso.

1 Definiciones y operadores matemáticos

- **Campo escalar:** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto no vacío. Llamaremos campo escalar sobre Ω a toda función a valores reales $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
- **Campo vectorial:** Sea Ω tal que $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. En coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + F_2(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} + F_3(x, y, z)\hat{\mathbf{z}} \quad (1)$$

Donde $F_i(x, y, z)$ con $i = 1, 2, 3$ es un campo escalar sobre Ω .

- **Divergencia:** Sea $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = F_1\hat{\mathbf{x}} + F_2\hat{\mathbf{y}} + F_3\hat{\mathbf{z}}$ un campo vectorial de clase C^1 . Se define el operador divergencia ∇ como:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \quad (2)$$

Donde es posible considerar que:

$$\nabla \equiv \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}. \quad (3)$$

Se debe tener en cuenta que el operador **divergencia** es un operador vectorial que entrega como resultado un valor escalar, de los cuales existen tres escenarios, los cuales se ejemplifican mediante un flujo:

- $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$: No hay fuentes ni sumideros en el lago; el flujo de agua es estable y no hay expansión ni compresión significativa en ningún punto.
- $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$: La divergencia es positiva en el punto de la fuente de agua, ya que el agua se está “expandiendo” desde ese punto hacia afuera. La velocidad del flujo aumenta a medida que nos alejamos de la fuente
- $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$: La divergencia es negativa en el punto del sumidero, ya que el agua se está “contrayendo” hacia el sumidero. La velocidad del flujo aumenta a medida que nos acercamos al sumidero.

- **Laplaciano:** Sea f un campo escalar de clase C^2 , se define el Laplaciano de f como:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 F_1\hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 F_2\hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 F_3\hat{\mathbf{z}} \quad (4)$$

Es importante considerar que el operador diferencial **Laplaciano** recibe un campo escalar dando como resultado un campo vectorial.

- **Rotor:** Sea $\mathbf{F} = F_1\hat{\mathbf{x}} + F_2\hat{\mathbf{y}} + F_3\hat{\mathbf{z}}$ un campo de clase C^1 , se define el operador rotor de \mathbf{F} como:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (5)$$

Es posible reescribir el rotor tal que:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \quad (6)$$

- **Gradiente:** El gradiente de una función escalar en el espacio tridimensional es un vector que indica la dirección y la magnitud de la tasa de cambio más rápida de la función en un punto dado, esta recibe funciones escalares,

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}. \quad (7)$$

- **Proposición 0.1:** Todo campo vectorial de clase C^1 que deriva de un potencial es irrotacional, esto es, si $\mathbf{F} = -\nabla g$ en Ω para algún potencial g de clase C^2 sobre Ω , entonces $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en Ω .
- **Proposición 0.2:** Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1 entonces:

$$\mathbf{F} \text{ es conservativo en } \mathbb{R}^3 \iff \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \text{ en } \mathbb{R}^3, \quad (8)$$

donde hemos usado “cero vector” $\mathbf{0}$ o simplemente 0. Algunas identidades de los operadores vectoriales:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \quad (9)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (10)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f \quad (11)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F} \quad (12)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G} \quad (13)$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}\nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G}\nabla \cdot \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \quad (14)$$

2 Teoremas

- **Teorema del rotor de Stokes:** Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y regular por pedazos, cuyo borde \mathcal{C} es una curva cerrada, simple y regular por pedazos. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 definido sobre un abierto \mathbb{U} que incluye una superficie \mathcal{S} y su borde \mathcal{C} . Sea finalmente $\hat{\mathbf{n}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre \mathcal{S} y supongamos que la curva cerrada \mathcal{C} es recorrida con orientación positiva con respecto a la elección de la normal $\hat{\mathbf{n}}$, es decir, respetando la regla de la mano derecha, entonces:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}) da. \quad (15)$$

- **Teorema de la divergencia de Gauss:** Sea \mathcal{V} una región sólida acotada por una superficie cerrada \mathcal{S} , y sea \mathbf{F} un campo vectorial continuamente diferenciable en \mathcal{V} . Entonces:

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{F} d\tau. \quad (16)$$

3 Ejercicios

1. Verifique si los siguientes campos vectoriales son conservativos:

$$(a) \mathbf{v} = [y^2 \cos(x) + z^3] \hat{\mathbf{x}} + [2y \sin(x) - 4] \hat{\mathbf{y}} + (3xz^2 + 2z) \hat{\mathbf{z}},$$

$$(b) \mathbf{g} = \frac{rz}{(r^2+z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{r}} - \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}.$$

Solución:

(a) Para verificar si los campos anteriores son conservativos se buscará expresar el campo vectorial en función del gradiente de un campo escalar $\mathbf{v} = -\nabla g$, debido a que al ser expresado de esta manera es posible demostrar que son conservativos, por lo tanto se busca obtener el campo escalar g , tal que lo imponemos como:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y^2 \cos(x) + z^3, \quad (17)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y \sin(x) - 4, \quad (18)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 3xz^2 + 2z. \quad (19)$$

Luego denotamos como g^* el campo que queremos buscar e imponer, por tanto:

$$\frac{\partial g^*}{\partial x} = y^2 \cos(x) + z^3, \quad (20)$$

$$\int \frac{\partial g^*}{\partial x} dx = \int y^2 \cos(x) dx + \int z^3 dx + C(y, z). \quad (21)$$

Es importante añadir una constante que sea función del resto de coordenadas $C(y, z)$ dado que a priori no sabemos de qué dependerá esta última al realizar la integración.

$$g^*(x, y, z) = y^2 \int \cos(x) dx + z^3 \int dx + C(y, z), \quad (22)$$

$$= y^2 \operatorname{sen}(x) + z^3 x + C(y, z). \quad (23)$$

Luego utilizamos esta candidato g^* para la siguiente componente, es decir, y .

$$\frac{\partial g^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y^2 \operatorname{sen}(x) + z^3 x + C(y, z)) = 2y \sin(x) + \frac{\partial}{\partial y} C(y, z). \quad (24)$$

Luego se impondrá que $\frac{\partial g^*}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$ por tanto:

$$\frac{\partial g^*}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad (25)$$

$$2y \sin(x) + \frac{\partial}{\partial y} C(y, z) = 2y \sin(x) - 4. \quad (26)$$

Tal que para lograr dicha igualdad se debe cumplir:

$$\frac{\partial}{\partial y} C(y, z) = -4, \quad (27)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial y} C(y, z) dy = -4 \int dy, \quad (28)$$

$$C(y, z) = -4y + C(z). \quad (29)$$

Luego volviendo sobre nuestra propuesta:

$$g^*(x, y, z) = y^2 \sin(x) + z^3 x + C(y, z), \quad (30)$$

$$= y^2 \sin(x) + z^3 x - 4y + C(z). \quad (31)$$

Vemos que ahora se desarrollo la dependencia de y asociado a la constante $C(y, z)$, por lo que nos queda ver su dependencia con respecto a z . Análogamente:

$$\frac{\partial g^*(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (y^2 \sin(x) + z^3 x - 4y + C(z)) = 3z^2 x + \frac{\partial}{\partial z} C(z). \quad (32)$$

Por lo que posteriormente se tendrá que:

$$\frac{\partial g^*(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial z}, \quad (33)$$

$$3z^2 x + \frac{\partial}{\partial z} C(z) = 3x z^2 + 2z. \quad (34)$$

Por lo que se deberá cumplir:

$$\frac{\partial}{\partial z} C(z) = 2z, \quad (35)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial z} C(z) dz = 2, \int z dz, \quad (36)$$

$$C(z) = z^2 + c. \quad (37)$$

Notar que la constante c , ya no depende de alguna variable con lo que finalmente se define un campo escalar tal que:

$$g^*(x, y, z) = y^2 \sin(x) + z^3 x - 4y + C(z), \quad (38)$$

$$= y^2 \sin(x) + z^3 x - 4y + z^2 + c. \quad (39)$$

El cual cumple con con la expresión $\mathbf{v} = -\nabla g^*$, lo que permite afirmar que el campo \mathbf{v} es conservativo.

- (b) De manera Similar a lo visto anteriormente se busca el demostrar que el campo vectorial \mathbf{g} es conservativo, pero con la excepción de que estamos en presencia de coordenadas cilíndricas, por lo tanto debemos tener en consideración el gradiente en dichas coordenadas.

$$\mathbf{g} = \frac{rz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{r}} - \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \quad (40)$$

Donde el gradiente para coordenadas cilíndricas vendrá dado por:

$$\nabla G = \frac{\partial G}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial G}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (41)$$

Se buscará por tanto encontrar un campo escalar tal que permita obtener G a partir del gradiente de dicho campo:

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{rz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (42)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \phi} = 0, \quad (43)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{-r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (44)$$

Luego se propone un campo escalar tal que:

$$\frac{\partial g^*}{\partial r}(r, \phi, z) = \frac{rz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (45)$$

$$g^*(r, \theta, z) = z \int \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr + C(\phi, z), \quad (46)$$

$$= z \int \frac{r}{(u)^{3/2}} \frac{du}{2r} + C(\phi, z), \quad (47)$$

$$= \frac{z}{2} \left(\frac{-2}{\sqrt{u}} \right) + C(\phi, z), \quad (48)$$

$$= \frac{-z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + C(\phi, z). \quad (49)$$

Luego (anteriormente consideramos un cambio de coordenadas $u = r^2 + z^2$):

$$\frac{g^*}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{-z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + C(\phi, z) \right) = \frac{\partial}{\partial \phi} C(\phi, z). \quad (50)$$

Imponemos que se cumpla:

$$\frac{\partial g^*}{\partial \phi} = \frac{\partial g}{\partial \phi} \quad (51)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} C(\phi, z) = 0 \quad (52)$$

Es decir, que $C(\phi, z)$ no es dependiente de ϕ por lo tanto:

$$g^* = -\frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + C(\phi, z) = -\frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + C(z). \quad (53)$$

Respectivamente sigue que:

$$\frac{\partial g^*}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + C(z) \right) = \frac{-r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\partial C(z)}{\partial z}. \quad (54)$$

Luego se impone nuevamente:

$$\frac{\partial g^*}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z}, \quad (55)$$

$$\frac{-r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\partial C(z)}{\partial z} = \frac{-r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (56)$$

$$\frac{\partial C(z)}{\partial z} = 0, \quad (57)$$

$$C(z) = c. \quad (58)$$

Con lo que finalmente se obtiene que la constante tampoco es dependiente de una variable de coordenadas, con lo que finalmente se obtiene:

$$g^*(r, \phi, z) = \frac{-z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + C. \quad (59)$$

Lo que nuevamente permite obtener un campo escalar tal que permita escribir el campo variable G como función el gradiente de un campo escalar.

2. Considere el siguiente campo vectorial asociado a velocidades:

$$\mathbf{v}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad \mathbf{g}(x, y) = (x, -y)$$

- (a) Dibuje el campo vectorial de velocidades.
 (b) Calcule su divergencia y rotor.
 (c) Analice brevemente que ocurre con los siguientes campos vectoriales en relación a su rotor:

$$\mathbf{g}(x, y, z) = y\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{h}(x, y, z) = -x^2\hat{\mathbf{x}}. \quad (60)$$

Solución:

- (a) Utilizando una calculadora gráfica se logra obtener la siguiente representación del campo vectorial:

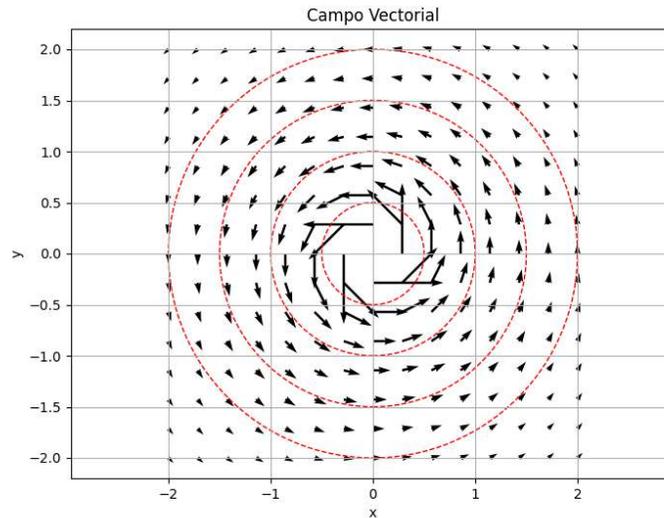


Figura 1: Visualización del campo vectorial

Es interesante notar que a primera instancia presenta una suerte de rotación.

- (b) Se obtendrá la divergencia y rotor del campo vectorial anterior, por lo tanto:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (61)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad (62)$$

$$= -y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1} + x \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1} \quad (63)$$

$$= y \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} - x \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \quad (64)$$

Luego es posible intuir que se tenemos un campo con una densidad de flujo constante. Por otro lado para su rotor se tendrá:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Con lo que el rotor vendrá dado por:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \right] \hat{\mathbf{x}} + \left[\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \right] \hat{\mathbf{y}} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \right] \hat{\mathbf{z}} \quad (65)$$

Desarrollando:

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0\hat{\mathbf{x}} + 0\hat{\mathbf{y}} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \right] \hat{\mathbf{z}} = 0. \quad (66)$$

Con lo que se obtiene un campo irrotacional, por lo que se debe tener el cuidado al realizar ideas intuitivas o asumir criterios únicamente de manera visual. Para el otro campo vectorial tenemos de manera directa que:

(c) Se busca obtener de manera gráfica el campo $\mathbf{G}(x, y, z) = y\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}}$:

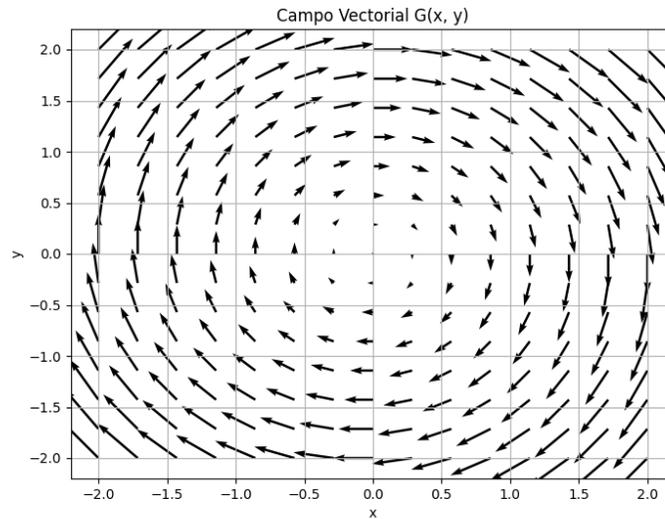


Figura 2: Visualización del campo vectorial

Luego su rotor vendrá dado por:

$$\nabla \times \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Luego:

$$\nabla \times \mathbf{g} = \left(\frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (68)$$

$$= 0\hat{\mathbf{x}} + 0\hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{z}} = -2\hat{\mathbf{z}} \quad (69)$$

Luego notamos que existe un rotor y que además presenta una breve semejanza a lo obtenido con anterioridad. Se busca analizar el siguiente gráfico vectorial $\mathbf{h} = -x^2\hat{\mathbf{x}}$, una idea visual vendrá dado por:

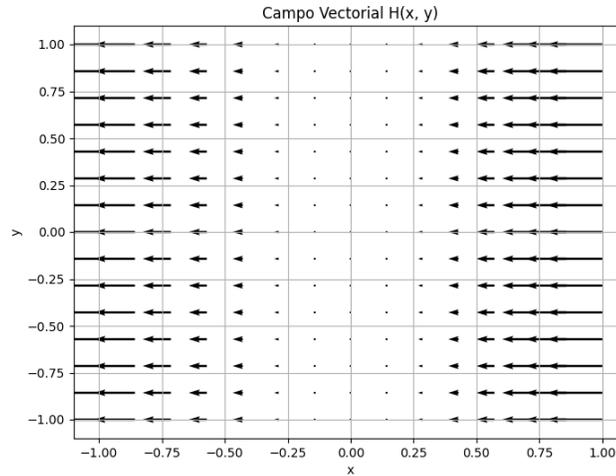


Figura 3: Visualización del campo vectorial

$$\nabla \times \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{g} &= \left(\frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial x^2}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(-\frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &= 0\hat{\mathbf{x}} + 0\hat{\mathbf{y}} - 2x\hat{\mathbf{z}} \\ &= -2x\hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Se observa nuevamente que el campo presenta una rotación.

3. Resuelva la ecuación de Laplace $\nabla^2 \psi = 0$ graficando su solución, para la geometría esférica (r, θ, ϕ) , con $\psi = \psi(r)$ dependiente solo de r (simetría esférica). Considere como condiciones de borde que $\psi(a) = v_a$ y $\psi(b) = v_b$.

Solución:

Se busca resolver la ecuación de Laplace teniendo en consideración el tipo de coordenada, además de algunas condiciones de borde. Por tanto el laplaciano en coordenadas esféricas viene dado por:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \quad (70)$$

Por enunciado se tendrá que ψ depende solo de una coordenada, es decir $\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$ y $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0$, por lo que este se reduce a:

$$\nabla^2 \psi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0 \quad (71)$$

Luego desarrollando lo anterior,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0 \quad (72)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0 \quad (73)$$

$$2r \frac{\partial \psi}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0 \quad (74)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (75)$$

Estamos en presencia de una EDO de segundo grado denominada Couchy-Euler, las cuales se resuelven proponiendo una solución $\psi(r) = r^\beta$ con $r > 0$ (Lo cual se cumple al tener en cuenta que estamos considerando un radio). Reemplazando se obtiene:

$$\frac{\partial^2(r^\beta)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial(r^\beta)}{\partial r} = 0 \quad (76)$$

$$\beta(\beta - 1)r^{\beta-2} + 2\beta r^{\beta-2} = 0 \quad (77)$$

$$r^{\beta-2}(\beta^2 - \beta + 2\beta) = 0 \quad (78)$$

$$r^{\beta-2}(\beta^2 + \beta) = 0 \quad (79)$$

Luego se tendrán dos soluciones:

$$\beta(\beta + 1) = 0 \quad (80)$$

$$\beta_1 = 0 \quad (81)$$

$$\beta_2 = -1 \quad (82)$$

Se tendrá que las soluciones son LI, por lo que se plantea una combinación lineal de la forma:

$$\psi(r) = Ar^0 + Br^{-1} \quad (83)$$

$$= A + \frac{B}{r} \quad (84)$$

Utilizando las condición de borde se tendrá:

$$\psi(a) = A + \frac{B}{a} = V_a \quad (85)$$

$$\psi(b) = A + \frac{B}{b} = V_b \quad (86)$$

Con lo que se obtiene lo siguiente despejando B

$$B = aV_a - Aa \quad B = bV_b - Ab \quad (87)$$

Despejando las constantes se tendrá:

$$A = \frac{aV_b - bV_a}{(a - b)} \quad B = bV_b - \frac{(aV_a - bV_b)b}{(a - b)} \quad (88)$$

Finalmente ψ vendra expresado:

$$\psi(r) = A + \frac{B}{r} \quad (89)$$

$$= \frac{aV_b - bV_a}{(a - b)} + \left(bV_b - \frac{(aV_a - bV_b)b}{(a - b)} \right) \frac{1}{r} \quad (90)$$

4. Considere el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) = [3x^2y - 3z + e^x \sin(z), x^2, e^x \cos(z) - 3x]. \quad (91)$$

(a) Calcule el rotor: $\nabla \times \mathbf{v}$

(b) Considere la curva Γ parametrizada como $t \in [0, 2\pi]$:

$$r(t) = [\cos(t), \sin(t), \cos(t)], \quad (92)$$

y calcule:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \quad (93)$$

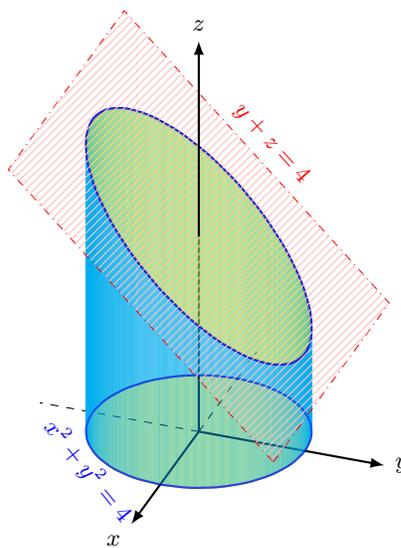
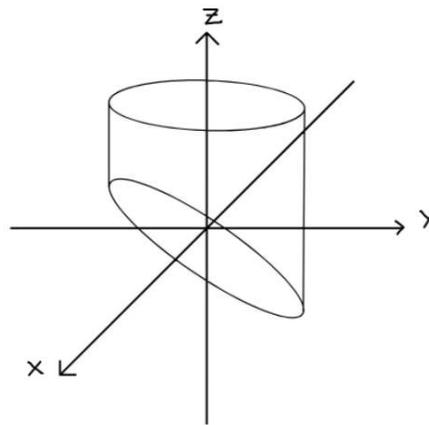


Figura 4: Calcule sobre la superficie mostrada.

Solución:

Resolución 4.1

Utilizando coordenadas cartesianas, tenemos que su rotor vendrá dado por:

$$\text{rot } \vec{V} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y - 3z + e^x \sin(z) & x^2 & e^x \cos(z) - 3x \end{bmatrix}$$

Lo que es equivalente:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial y} (e^x \cos(z) - 3z) - \frac{\partial x^2}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos(z) - 3x) - \frac{\partial}{\partial z} (3x^2y - 3z + e^x \sin(z)) \right) \hat{\mathbf{y}} \\ &+ \left(\frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y - 3x + e^x \sin(z)) \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &= 0\hat{\mathbf{x}} + (e^x \cos(z) - 3 + 3 - e^x \cos(z))\hat{\mathbf{y}} + (2x - 3x^2)\hat{\mathbf{z}} \\ &= 0\hat{\mathbf{x}} + 0\hat{\mathbf{y}} + (2x - 3x^2)\hat{\mathbf{z}} \\ &= (0, 0, 2x - 3x^2) \end{aligned}$$

Con lo que se observa una rotación asociada al campo vectorial.

Resolución 4.2

Considerando que la parametrización viene dada por:

$$r(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t)) \quad (94)$$

Con $t \in [0, 2\pi]$. El obtener de manera directa $\oint_{\Gamma} V \cdot dr$ es bastante complejo mediante esta parametrización, por lo que haremos uso del teorema de Stokes separando por partes la figura en su manto y su tapa superior:

$$\oint_{\Gamma} V \cdot dr = \int \int_{Manto} \text{rot}(V) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA + \int \int_{sup} \text{rot}(V) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (95)$$

Teniendo en consideración que el rotor obtenido con anterioridad viene dado por:

$$\nabla \times \vec{V} = (0, 0, 2x - 3x^2) \quad (96)$$

Es decir que posee componente solo en $\hat{\mathbf{z}}$, luego al parametrizar en cilíndricas se tendrá que $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\rho}$, lo que implicara que $\hat{\rho} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$, por lo tanto solo sera de interés la tapa superior

$$\oint_{\Gamma} V \cdot d\vec{r} = \int_{sup} \text{rot}(V) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (97)$$

Luego la parametrización de la tapa superior Γ corresponderá a una circunferencia de radio 1. Por tanto:

$$\{x^2 + y^2 \leq 1; z = z^*\widehat{\mathbf{z}}\} \quad (98)$$

Dado que se considera una altura arbitraria, luego:

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z^*) \quad (99)$$

Con $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\rho \in [0, 1]$. Debemos obtener la normal, la cual viene dada por $\left\| \frac{\partial \phi(\rho, \theta)}{\partial \rho} \times \frac{\partial \phi(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right\|$, donde:

$$\frac{\partial \phi(\rho, \theta)}{\partial \rho} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \quad (100)$$

$$\frac{\partial \phi(\rho, \theta)}{\partial \theta} = (-\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), 0) \quad (101)$$

Luego la normal vendrá expresada por:

$$\widehat{\mathbf{n}} = \left| \frac{\partial \phi(\rho, \theta)}{\partial \rho} \times \frac{\partial \phi(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right| = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}} & \widehat{\mathbf{y}} & \widehat{\mathbf{z}} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

$$\widehat{\mathbf{n}} = 0\widehat{\mathbf{x}} + 0\widehat{\mathbf{y}} + (\rho \cos^2(\theta) + \rho \sin^2(\theta))\widehat{\mathbf{z}} \quad (103)$$

$$= 0\widehat{\mathbf{x}} + 0\widehat{\mathbf{y}} + \rho\widehat{\mathbf{z}} \quad (104)$$

$$= (0, 0, \rho) \quad (105)$$

Finalmente reemplazando se obtiene lo siguiente (Es importante notar que reemplazo sobre la parametrización de la tapa superior vista anteriormente):

$$\oint_{\Gamma} V \cdot dr = \int_{sup} \text{rot}(V) \cdot \widehat{\mathbf{n}} \cdot dA \quad (106)$$

$$= \int_{sup} 2\rho \cos(\theta) - 3(\rho \cos(\theta))^2 \widehat{\mathbf{z}} \cdot \rho \widehat{\mathbf{z}} dA \quad (107)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2\rho \cos(\theta) - 3\rho^2 \cos^2(\theta)) \rho(d\rho)(d\theta) \quad (108)$$

$$= \frac{-3\pi}{4} \quad (109)$$

Con lo que finalmente la integral de línea o de trabajo es simplificada de gran manera mediante el uso del teorema de Stokes,

$$\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\widehat{\mathbf{r}} = \frac{-3\pi}{4}$$

5. Considere el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \left[5x + \cos(1 + y^2 + z^3) \right] \hat{\mathbf{x}} + \left[\ln(1 + x^2 + z^4) - 5y \right] \hat{\mathbf{y}} + \left[z\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 5 \right] \hat{\mathbf{z}}. \quad (110)$$

Demuestre que \mathbf{v} es C^1 en todo \mathbb{R}^3 . Además utilizando el teorema de la divergencia, obtenga:

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}. \quad (111)$$

Seun la normal exterior, donde S es la superficie del cilindro centrado en (0,0), de radio 1 y altura $z \in [0, 1]$.

Solución:

De manera directa se tendrá que por álgebra y composición de funciones C^1 el campo vectorial también lo sera, lo que nos permite utilizar teorema de la divergencia. Similar al problema anterior, el obtener $\int \int_s V \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ de manera directa es complejo, debido a que se deberá parametrizar el campo y además obtener $\hat{\mathbf{n}}$, por tanto una solución a esto es utilizar el teorema de la divergencia, por lo que sea un volumen que contenga la superficie:

$$\int \int V \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \int \int \int \text{div}(V) \cdot dV \quad (112)$$

Luego la divergencia vendrá dada por:

$$\text{div}(V) = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \quad (113)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x} (5x + \cos(1 + y^2 + z^3)) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (\ln(1 + x^2 + z^4) - 5y) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (z\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 5) \end{aligned} \quad (114)$$

$$= 5 - 5 + \sqrt{1 + x^2 + y^2} \quad (115)$$

$$= \sqrt{1 + x^2 + y^2} \quad (116)$$

Luego haremos cambio de coordenadas a polares tal que $x = \rho \cos(\theta)$ y $y = \rho \sin(\theta)$ con $\rho \in [0, 1]$, $z \in [0, 1]$:

$$\text{div}(V) = \sqrt{1 + \rho^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \quad (117)$$

$$= \sqrt{1 + \rho^2} \quad (118)$$

Por lo tanto:

$$\int \int \int \text{div}(V) dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2} \rho(d\rho)(d\theta)(dz) \quad (119)$$

$$= \frac{2\pi}{3} (2^{3/2} - 1) \quad (120)$$

Con lo que finalmente se tendrá que:

$$\int_S \vec{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \frac{2\pi}{3} (2^{3/2} - 1) \quad (121)$$

6. Una bobina muy larga de radio b , tiene n vueltas por unidad de largo y lleva una corriente

$$\mathbf{I}(t) = I_o \sin(\omega t) \quad (122)$$

- (a) Encuentre el campo magnético dentro de la bobina.
- (b) Encuentre el campo eléctrico dentro de la bobina.
- (c) Encuentre el campo eléctrico fuera de la bobina.

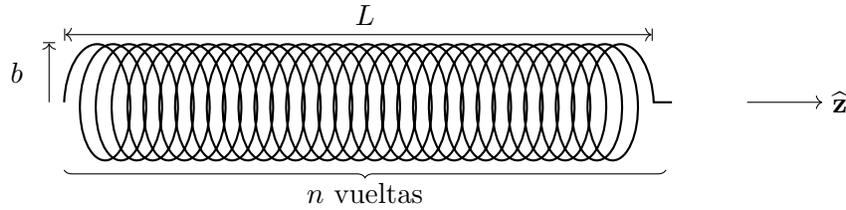


Figura 5: Bobina.

Solución:

Resolucion 6.1

Para resolver este problema se deberá hacer uso de la simetría presente, por lo que aplicando la regla de la mano derecha siguiendo la corriente, obtenemos que el campo magnético de la bobina tiene la forma de $\mathbf{B} = B(z)\hat{\mathbf{z}}$. Además, se asumirá un régimen cuasiestacionario (se desprecia la corriente de desplazamiento \mathbf{J}). Luego, usando la Ley de Ampère recorriendo en sentido antihorario el camino Γ_1 y suponiendo que la bobina tiene un largo L , obtenemos:

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \mathbf{I}_{\text{enlaz}} \quad (123)$$

Además, recordando que $\mathbf{I}_{\text{enlazada}}$ para una bobina con n vueltas por unidad de largo es igual a $\mathbf{I}(t) \cdot n$,

$$\mathbf{B} \cdot L = \mu_0 n L \mathbf{I}(t) \quad (124)$$

Luego, reemplazando $\mathbf{I}(t)$ obtenemos finalmente:

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I_o \sin(\omega t) \hat{\mathbf{z}} \quad (125)$$

Resolucion 6.2

Para obtener el campo eléctrico dentro de la bobina, se seguirá un camino circular Γ_2 alrededor de esta, para un radio $r < b$. Luego, por ley de Faraday-Lenz obtenemos lo siguiente:

$$\oint_{\Gamma_2} \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \int_{\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (126)$$

Luego, resolviendo las integrales se obtiene:

$$\mathcal{E} \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (127)$$

Por la parte a) ya conocemos el campo magnético, por lo que reemplazando y derivando, se obtiene finalmente que:

$$\mathcal{E} = -\frac{r\mu_0 n I_o \omega \cos(\omega t)}{2} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (128)$$

Resolucion 6.3

Para el campo eléctrico fuera de la bobina, se deberá hacer uso de la ley de Ampère, por lo que se considerará un radio $r > b$, obteniendo:

$$\oint_{\Gamma_2} \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \int_{\Omega} \boldsymbol{\mathcal{B}} \cdot d\mathbf{S} \quad (129)$$

Luego, resolviendo las integrales se obtiene:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot 2\pi r = -\pi b^2 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\mathcal{B}} \quad (130)$$

Por la parte *a*) ya conocemos el campo magnético, por lo que reemplazando y derivando, se obtiene finalmente que:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{b^2 \mu_0 n I_0 \omega \cos(\omega t)}{2r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (131)$$