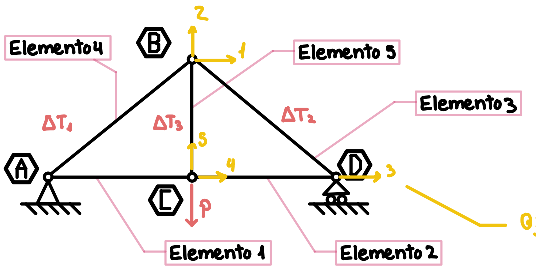
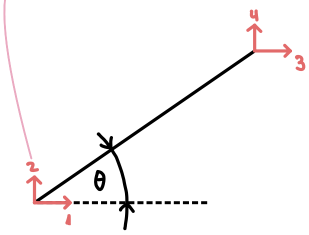
Auxiliar N°4



$C = \cos(\theta)$ $\quad S = \sin(\theta)$

$$\left(\frac{EA}{L}\right)_n \begin{bmatrix} c^2 & & & Sim. \\ cs & s^2 & & \\ -c^2 & -cs & c^2 & \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

grados de libertad locales en coordenadas globales



¡Ojo! Definimos solo aquellos grados de libertad que NO SE ENCUENTRAN RESTRINGIDOS.

↳ Sabemos de la cátedra que $[K]\cdot\{U\} = \{F\} + \{F_T\}$ → Necesitamos buscar la matriz de rigidez y los vectores de fuerzas:

1- Determinando las matrices de rigidez locales de cada elemento

Elemento 1:

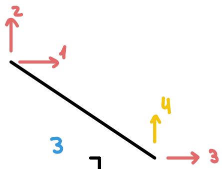
$$[K_1] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array}$$

→ Dado que solo los grados 3 y 4 del elemento concuerdan con grados de libertad no restringidos de la estructura, solo calcularemos la rigidez asociada a esos dos grados de libertad.

Elemento 2:

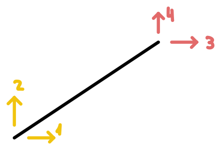
$$[K_2] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{4} & & S \\ 0 & 0 & \\ -\frac{EA}{4} & 0 & \frac{EA}{4} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 3 \end{array}$$

Elemento 3:



$$[K_3] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{16EA}{125} & & S \\ -\frac{12EA}{125} & \frac{9EA}{125} & \\ -\frac{16EA}{125} & \frac{12EA}{125} & \frac{16EA}{125} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

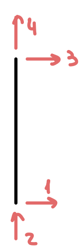
Elemento 4:



$$[K_4] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{16EA}{125} & S \\ \frac{12EA}{125} & \frac{9EA}{125} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

Elemento 5:

$$[K_4] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 4 & 5 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & & & S \\ 0 & \frac{EA}{3} & & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -\frac{EA}{3} & 0 & \frac{EA}{3} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$



2.- Ensamblando la matriz de rigidez global

$$[K_G] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{32EA}{125} & & & S & \\ 0 & \frac{179EA}{375} & & & \\ -\frac{16EA}{125} & \frac{12EA}{125} & \frac{189EA}{500} & & \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{4} & \frac{EA}{2} & \\ 0 & -\frac{EA}{3} & 0 & 0 & \frac{EA}{3} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

→ Nos aseguramos de sumar las rigideces que correspondan a los grados de libertad asociados correspondientes.

3.- Encontrando las fuerzas causadas por los delta de temperatura.

↳ Sabemos que $\varepsilon_T = \alpha \cdot \Delta T \longrightarrow f_T = A \cdot E \cdot \alpha \cdot \Delta T$

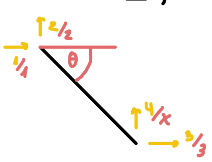
Dado a que en este caso tenemos que la fuerza dados los cambios de temperatura, irá en sentido axial, entonces debemos proyectar las fuerzas en los nodos para que concuerden con las direcciones de nuestros grados de libertad.

$$\therefore \vec{f}_{T_i} = AE\alpha\Delta T_i \cdot \begin{Bmatrix} -c \\ -s \\ c \\ s \end{Bmatrix}$$

Elemento 1: No tiene ΔT, por lo que no calculamos $\vec{f}_T$

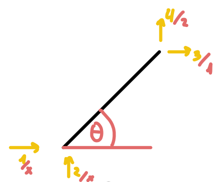
Elemento 2: No tiene ΔT, por lo que no calculamos $\vec{f}_T$

Elemento 3:



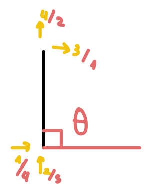
$$\vec{f}_{T_3} = AE\alpha\Delta T_2 \cdot \begin{Bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ x \end{array} \quad c = 4/5, \; s = -3/5$$

Elemento 4:



$$\vec{f}_{T_4} = AE\alpha\Delta T_1 \cdot \begin{Bmatrix} -c \\ -s \\ c \\ s \end{Bmatrix} \begin{array}{c} x \\ x \\ 1 \\ 2 \end{array} \quad c = 4/5, \; s = 3/5$$

Elemento 5:



$$\vec{f}_{T_3} = AE\alpha\Delta T_3 \cdot \begin{Bmatrix} -c \\ -s \\ c \\ s \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{array} \quad c = 0, \; s = 1$$

$$\therefore \vec{f}_{T\,total} = AE\alpha \begin{Bmatrix} \frac{4}{5}\Delta T_1 + \frac{4}{5}\Delta T_2 \\ \Delta T_3 + \frac{3}{5}\Delta T_1 - \frac{3}{5}\Delta T_2 \\ -\frac{4}{5}\Delta T_2 \\ 0 \\ -\Delta T_3 \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

4.- Definiendo el vector de fuerzas externas.

$$\vec{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

5.- Ensamblando el Problema para encontrar los desplazamientos.

Dado que sabemos que: $[K]\cdot\{u\} = \{F\} + \{F_T\}$

$$\begin{bmatrix} \frac{32EA}{125} & & & S & \\ 0 & \frac{179EA}{375} & & & \\ \frac{-16EA}{125} & \frac{12EA}{125} & \frac{189EA}{500} & & \\ 0 & 0 & \frac{-EA}{4} & \frac{EA}{2} & \\ 0 & \frac{-EA}{3} & 0 & 0 & \frac{EA}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = AE\alpha \begin{Bmatrix} \frac{4}{5}\Delta T_1 + \frac{4}{5}\Delta T_2 \\ \Delta T_3 + \frac{3}{5}\Delta T_1 - \frac{3}{5}\Delta T_2 \\ -\frac{4}{5}\Delta T_2 \\ 0 \\ -\Delta T_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{32EA}{125} & & & S & \\ 0 & \frac{179EA}{375} & & & \\ \frac{-16EA}{125} & \frac{12EA}{125} & \frac{189EA}{500} & & \\ 0 & 0 & \frac{-EA}{4} & \frac{EA}{2} & \\ 0 & \frac{-EA}{3} & 0 & 0 & \frac{EA}{3} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} AE\alpha\left(\frac{4}{5}\Delta T_1 + \frac{4}{5}\Delta T_2\right) \\ AE\alpha\left(\Delta T_3 + \frac{3}{5}\Delta T_1 - \frac{3}{5}\Delta T_2\right) \\ \left(-\frac{4}{5}\Delta T_2\right) \\ 0 \\ -(\Delta T_3\cdot AE\alpha + P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{814365}{177184AE}\cdot AE\alpha\left(\frac{4}{5}\Delta T_1 + \frac{4}{5}\Delta T_2\right) \\ \frac{22740}{5537\cdot AE}\cdot AE\alpha\left(\Delta T_3 + \frac{3}{5}\Delta T_1 - \frac{3}{5}\Delta T_2\right) \\ \frac{7640}{5537AE}\cdot\left(-\frac{4}{5}\Delta T_2\right) \\ \frac{-14894}{5539AE}\cdot 0 \\ \frac{30255}{5537AE}\cdot -(\Delta T_3\cdot AE\alpha + P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix}$$