



Revista de la Sociedad Chilena de Ingeniería Hidráulica



$$\varepsilon = \frac{8\pi}{30} \int_0^{\infty} d\rho \cdot \rho^4 f(\rho),$$

REVISTA DE LA
SOCIEDAD CHILENA DE
INGENIERÍA HIDRÁULICA

SOCHID

Sede Instituto de Ingenieros de Chile – San Martín 352 – Fono 2 2698 4028 – Santiago CHILE

DIRECTORIO SOCHID

Presidente:	Hernán Alcayaga S.
Vicepresidente:	Damaris Orphanópoulos S..
Tesorero:	Cristián Núñez R.
Directores:	Cristián Escauriaza M. Karla González N. Aldo Tamburrino T.
Secretario General:	Francisco Romero B.

DIRECTORES HONORARIOS

Francisco J. Domínguez S. (Q.E.P.D.)
Horacio Mery M.
Eduardo Varas C.
Sergio Radrigán V.
Humberto Peña T.
Ernesto Brown F. (Q.E.P.D.)
Bonifacio Fernández L.
Jorge Bravo S
Luis Ayala R.
Ludwig Stowhas B.
Ricardo González V.
José Vargas B.
Luis Estellé A.
Raúl Demangel C.

EDITOR DE LA REVISTA

Aldo Tamburrino Tavantzis
atamburr@ing.uchile.cl
San Martín 352, Santiago
Fono 2 2698 4028
www.sochid.cl

Imágenes de la portada: Busto de Claude Louis Marie Henri Navier en la École Nationale des Ponts et Chaussées (https://simple.wikipedia.org/wiki/Claude-Louis_Navier) y expresión deducida por Navier para el coeficiente de la fuerza debido a la interacción molecular asociada a la fricción de los fluidos

REVISTA DE LA SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERÍA HIDRÁULICA

ÍNDICE

Editorial	1
A 200 años de la contribución de Navier a la determinación de la resistencia del flujo de fluidos	
Aldo Tamburrino Tavantzis	3
Un problema inverso de mecánica de fluidos aplicado en la detección de anomalías en válvulas cardíacas	
Jorge Aguayo, Cristóbal Bertoglio, Axel Osses	39
Flujo en arterias con aneurisma cerebral: Un análisis numérico en régimen permanente e impermante	
Rodrigo González Herrera	55
Campo de velocidades inducido por la deformación del fondo en un fluido con superficie libre	
Rodrigo González, Aldo Tamburrino	87
Modificación teoremas de promediado volumétricos en medios porosos	
Rodolfo Morales	101
Recordando al ingeniero civil Alberto Sepúlveda Vera	
Alejandro López Alvarado	115
Hidro-Grafía	
Aldo Tamburrino Tavantzis	119

EDITORIAL

En este número de la Revista de la SOCHID conmemoramos los doscientos años desde que Claude-Louis Navier presentó su artículo “Sobre las leyes del movimiento de los fluidos” en la Académie Royale des Sciences de París, el que fue publicado en 1823 en el Tomo VI de las Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France. El trabajo de Navier fue el primero que agregaba un término debido a la fricción a la ecuación de Euler. Al artículo de Navier le siguieron otros de Cauchy, Poisson, Saint-Venant y Stokes, los que reafirmaban la estructura de la ecuación del movimiento presentada en 1822, aunque criticaban las otras deducciones o enfatizaban distintos aspectos de la fricción interna. Dos de los artículos de este número presentan resultados numéricos de flujos sanguíneos, lo que no es de extrañar si recordamos que mucha de la información empírica clave del siglo XIX, con la que se comparaba el resultado teórico obtenido con las recién deducidas ecuaciones, fue obtenida de experimentos realizados en tubos capilares para caracterizar el flujo sanguíneo, como fueron los trabajos de Poiseuille y Girard, entre otros.

Damos la bienvenida al Directorio de la SOCHID a las ingenieras Karla González Novión y Damaris Orphanópoulos Stehr, quienes fueron elegidas durante la Asamblea Anual de Socios celebrada por videoconferencia, el 13 de julio de 2022 y asumieron sus cargos en la sesión presencial de Directorio celebrada el 4 de agosto de 2022. En la misma sesión, y por decisión unánime de los Directores, fue otorgado el grado de Director Honorario de la Sociedad al ingeniero Raúl Demangel Castro.

Lo que queda del año será bastante intenso con tres actividades organizadas o patrocinadas por la SOCHID: el IX Seminario Internacional de Ingeniería y Operación Portuaria (SIOP), a desarrollarse del 26 al 28 de octubre en Valparaíso; las XVI Jornadas de Hidráulica Francisco Javier Domínguez, el 17 y 18 de noviembre y el Tercer Congreso Chileno de Ingeniería Ambiental en Sistemas Acuáticos (III CCHIASA), del 14 a 16 de diciembre. Los dos últimos se llevarán a cabo en Santiago. Invitamos a nuestros socios e interesados a participar en dichos eventos.

Lamentamos el fallecimiento de nuestro socio Alberto Sepúlveda Vera, ocurrido a comienzos de agosto, el que es recordado en una nota escrita por un socio, con el que tuvo una gran cercanía profesional y de amistad.

Por último, no dejamos de invitar a presentar artículos para los próximos números de la Revista, especialmente para el de Diciembre de este año.

Aldo Tamburrino Tavantzis
Editor

A 200 AÑOS DE LA CONTRIBUCIÓN DE NAVIER A LA DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL FLUJO DE FLUIDOS

ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

Profesor Asociado, Departamento de Ingeniería Civil,
Investigador Asociado, Advanced Mining Technology Center,
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile
atamburr@ing.uchile.cl
ORCID: 0000-0001-5406-370X

RESUMEN

El artículo presenta la historia de las ecuaciones del movimiento de los fluidos, conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes. Partiendo desde el trabajo de Castelli que en 1628 estableció la ecuación de continuidad, hasta la consolidación definitiva de las condiciones de borde que deben aplicarse a las ecuaciones diferenciales del movimiento en 1850, cuando Stokes categóricamente establece la condición de no deslizamiento del fluido en contacto con una superficie sólida, la determinación de la resistencia del flujo de fluidos fue un tema que involucró a las mentes más brillantes de la época. Con el artículo, el autor conmemora los 200 años desde Navier leyó su trabajo *Sur les Lois du Mouvement des Fluides* en la Académie Royale des Sciences de l'Institut de France.

Palabras claves: Viscosidad, Navier, Cauchy, Poisson, Saint-Venant, Stokes.

1. INTRODUCCIÓN

Este año se cumplen 200 años desde que Claude Louis Marie Henri Navier leyó su artículo *Sur les Lois du Mouvement des Fluides* en la Académie Royale des Sciences de l'Institut de France. Siendo el trabajo de Navier parte de los cimientos de la mecánica de los fluidos e hidráulica, parece adecuado conmemorar el trabajo de Navier en la Revista de la SOCHID. En este artículo se presenta un resumen de la contribución de Navier al controversial problema de la resistencia de los fluidos al movimiento, que mantuvo ocupados a los personajes más brillantes de las matemáticas, física e ingeniería desde el siglo XVIII hasta la mitad del siglo siguiente, cuando con el trabajo de Stokes podemos decir que definitivamente se consolidaron las ecuaciones del movimiento que ahora identificamos como ecuaciones de Navier-Stokes.

Antes de presentar cómo introdujo Navier la resistencia al movimiento de los fluidos, es de interés mencionar parte de su biografía, tomada de McKeon (1981). Navier nació en Dijon el 19 de febrero de 1785 y murió el 21 de agosto de 1836 en París. Su padre era un abogado

de la Asamblea Legislativa en París durante la Revolución Francesa y murió en 1793, quedando bajo la tutela de su tío abuelo Emiland Gauthey, ingeniero jefe del Cuerpo de Puentes y Caminos de París, quien lo educó y preparó para que en 1802 Navier ingresara a la École Polytechnique, donde tuvo como profesor de análisis (cálculo) a Fourier, quien sería su patrono y, posteriormente, amigo. En 1804 Navier entró a la École des Ponts et Chaussées, graduándose en 1806. Es importante mencionar el paso de Navier por las dos École: en la primera adquirió una rigurosa formación matemática y teórica, mientras que en la segunda recibió una orientación a la práctica de la ingeniería. Navier sabría sacar provecho a esa doble formación. Pocos meses después de su graduación, falleció su tío abuelo, quien era un reconocido ingeniero de puentes y canales, por lo que la administración del Cuerpo de Puentes y Caminos le encargó en 1807 que editara los manuscritos de Gauthey, los que fueron publicados entre 1809 y 1816. A partir de 1819, Navier estuvo a cargo de los cursos de mecánica aplicada en la École des Ponts et Chaussées. En paralelo a la edición de los manuscritos de ingeniería de su tío abuelo, durante 1807 a 1820 hizo del análisis matemático una herramienta fundamental de la ingeniería civil. La conjunción de estas dos habilidades, la teórica-analítica y la aplicación práctica a la ingeniería, fueron fundamentales para realizar los aportes que hizo en mecánica de sólidos (elasticidad) y mecánica de fluidos.

2. EL PROBLEMA DEL MOVIMIENTO DE LOS FLUIDOS

De manera arbitraria y solo por fijar un punto de partida, podemos establecer que la hidráulica moderna comienza como una ciencia experimental en Italia en el siglo XVI y el siglo siguiente se establece de forma más teórica, siendo uno de sus mejores exponentes Benedetto Castelli (c.1577 – c.1644) quien en su tratado *Della misura delle acque correnti* publicado en 1628 presenta la ecuación de continuidad¹. En el libro de Castelli el lector no verá ninguna ecuación, por lo no espere encontrar que si en dos secciones (1) y (2) de un canal por el que escurre un caudal Q , se cumple $V_1A_1 = V_2A_2$. Esta ecuación está enunciada en la página 8 de la edición de 1639 a la que tuvo acceso el autor y que se expone en las líneas dentro del rectángulo de la Fig. 1. Una traducción laxa del texto es “si en dos tuberías con velocidad desigual descargan en tiempos iguales, igual cantidad de agua, el tamaño de la primera al tamaño de la segunda tendrá una recíproca proporción de la velocidad de la segunda a la velocidad de la primera”. Es decir, si el caudal en dos tuberías es el mismo, se tendrá que $A_1:A_2 = V_2:V_1$.

En los siglos XVI y XVII tuvo lugar un cambio drástico en el pensamiento científico, el que culminó con el trabajo de Newton (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687). Como un reflejo de este cambio, denominado Revolución Científica, en 1662 se creó la Royal Society of London for Improving Natural Knowledge, y en 1666 la Académie des Sciences de Paris. (Spencer et al, 2022). El desarrollo de la física requirió mejores herramientas

¹ Aunque las proposiciones establecidas por Castelli en su tratado ya habían sido indicadas por Leonardo da Vinci un siglo antes, éste no las divulgó, por lo que quedaron desconocidas hasta que los códices con sus obras comenzaron a ser redescubiertos y conocidos. Leonardo no formó discípulos, al contrario de Galileo Galilei quien pudo formar una escuela, siendo Benedetto Castelli uno de sus mejores exponentes.

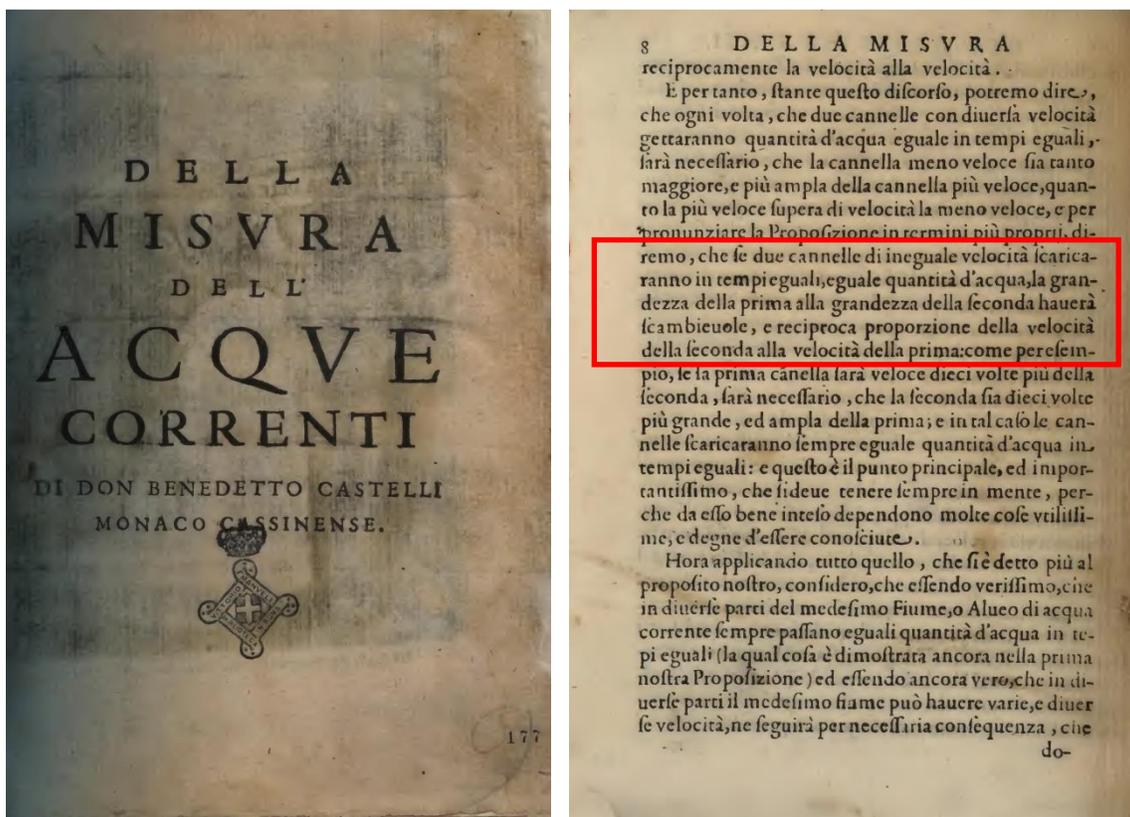


Figura 1. Primera obra en la que se presenta la ecuación de continuidad. Edición de 1639 de la obra de Benedetto Castelli, En la octava página se indica que $A_1 : A_2 = V_2 : V_1$.

matemáticas. A fines del siglo XVI, el matemático francés François Viète (1540-1603) escribió el primer trabajo de álgebra simbólica, introduciendo el uso de letras para representar cantidades (Busard, 1981). Otro avance significativo lo hizo René Descartes (1596-1650), quien redujo la geometría a ecuaciones (Mahoney, 1981). Este proceso culminó con Newton y Leibnitz quienes establecieron el cálculo moderno. Debemos tener presente que, en esa época, los conceptos de momentum y energía no estaban aún bien establecidos. Respecto a la fuerza motriz que pone a los cuerpos en movimiento, en el siglo XVIII el enfoque (y resultado de su aplicación) variaba, según la escuela o corriente a la que adhería el investigador. De este modo, los cartesianos indicaban que era el momentum, los newtotianos, la variación de momentum y los leibnizianos la conversión de *vis morta* a *vis viva* (concepto que ahora asociamos a energía). Es así como Pierre Varignon (1654-1722) aplicando el cálculo desarrollado por Leibniz a la mecánica presentada por Newton determinó analíticamente, basado en el concepto de momentum la velocidad de salida por un orificio, con un resultado erróneo en un coeficiente $\sqrt{2}$, como es de esperar (Rouse e Ince, 1963). Daniel Bernoulli (1700-1782) publicó en 1738 *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*² (Fig. 2), en el que usa por primera vez el enfoque de energía para

² Las traducciones al inglés de la *Hydrodynamica* de Daniel Bernoulli y de la *Hydraulica* de Johann Bernoulli, fueron publicadas en 1969 en un solo libro por Dover Publications Inc., y una copia se encuentra en la Biblioteca

abordar el problema y obtener de manera correcta la expresión de Torricelli para la descarga a través de un orificio.

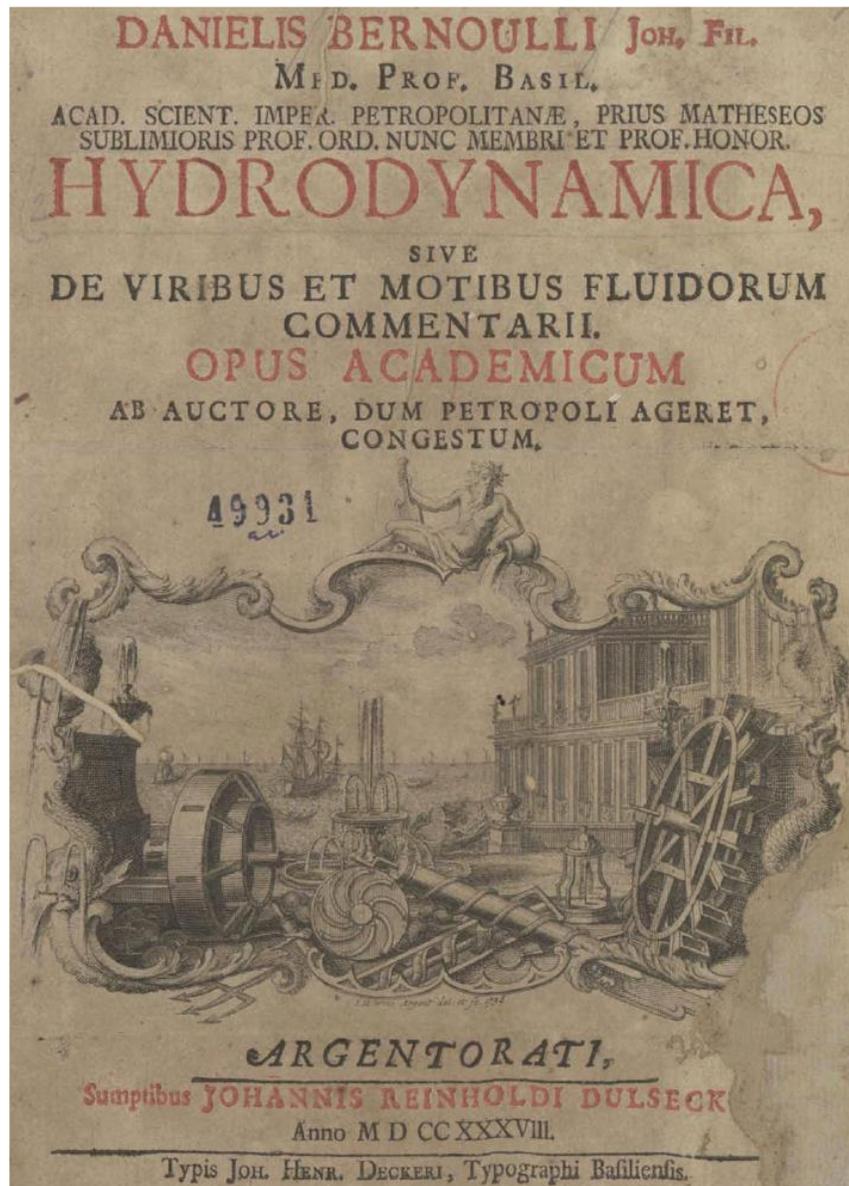


Figura 2. Primera página de la primera edición (1738) de la *Hydrodynamica* por Daniel Bernoulli.

Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) demostró la conservación de las “fuerzas vivas” y en 1744 publicó *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, en el que demostró los

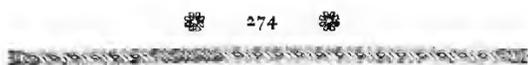
del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Chiel. Resultó decepcionante para el autor, cuando era alumno, no encontrar en dichos libros la ecuación de Bernoulli que le enseñaban en clases. En ninguna parte aparece una ecuación similar a $B = v^2/2g + p/\gamma + z$. Siguiendo a Leibniz, cuya formulación de los conceptos de energía se basaban en la caída de partículas, la conservación de energía que aplica Bernoulli considera solamente los términos asociados a lo que ahora llamamos energía cinética (*vis viva*, “fuerzas vivas”) y energía potencial (*vis morta*, asociada a la presión o peso). El concepto de trabajo, asociado al término de la presión, aún no se había desarrollado cuando los Bernoulli escribieron sus obras.

resultados de Bernoulli. En esta obra considera que el equilibrio que existe entre “las partes” de los fluidos a pesar de la diferencia de presiones se debe a la adhesión existente entre las partículas, y se pregunta en el Capítulo IV: “¿Esta fuerza es puramente pasiva, es decir, proviene únicamente de la rugosidad de las partículas del Fluido que se tocan entre sí, o es una fuerza actuante que tiende a unir estas partículas y acercarlas entre sí?” (D’Alembert, 1744, p. 37). En 1768, en la primera parte del volumen 5 de *Opuscules Mathématiques*, D’Alembert publica el artículo *Paradoxe proposé aux Géometres sur la Resistance des Fluides*, en la que demuestra que la fuerza debida al movimiento de un fluido incompresible sobre un obstáculo axisimétrico, y cuya geometría de la mitad que enfrenta al flujo sea igual a la trasera, es nula. Sin poder explicar la razón de este resultado, concluye el artículo escribiendo que es una “paradoja singular que dejo para aclarar a los Geómetras” (D’Alembert, 1768).

Avances significativos a la dinámica de Newton los hizo Leonard Euler (1707-1783). La obra de Newton se refiere básicamente a la dinámica de la partícula en una dimensión. Euler generaliza el movimiento a las tres dimensiones espaciales y en 1750 publicó *Découverte d’un nouveau principe de mécanique*, en el que extiende la segunda ley de Newton a un medio continuo. En 1757 se publicaron en las *Mémoires de l’Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres* de Berlín los trabajos presentados en 1755. En la sección de Matemáticas se presentan tres trabajos de Euler: *Principes généraux de l’état de l’équilibre des fluides*, *Principes généraux du mouvement des fluides* y *Continuation des Recherches sur la théorie du mouvement des fluides*. En el segundo de ellos, Euler deriva las componentes en las tres direcciones espaciales de la ecuación del movimiento del fluido ideal, que actualmente conocemos como ecuación de Euler (Fig. 3). Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), entre sus muchos aportes a las matemáticas y a la física se encuentra el trabajo *Memoire sur la theorie du mouvement des fluides*, en el que hace uso de la función potencial para describir el movimiento de los fluidos y al final del artículo trata de las ondas gravitacionales superficiales infinitesimales, obteniendo que su celeridad está dada por \sqrt{ga} , siendo a la profundidad del cuerpo de agua y g la aceleración de gravedad.

3. ESTRUCTURA DE LA MATERIA: ¿CONTINUA O ATÓMICA?

D’Alembert, Euler y Lagrange hicieron amplio uso de ecuaciones diferenciales, utilizando las herramientas del cálculo desarrollado hasta ese momento. Esto significaba que consideraban la materia como un medio continuo. Sin embargo, este supuesto generaba algunos problemas, por ejemplo, cuando buscaban explicar la deformación de los sólidos o los vórtices y remolinos en los que ahora conocemos como flujos turbulentos. Este desarrollo de la hidrodinámica, denominado “mecánica analítica” se contraponen al que más tarde se denominaría “mecánica física” y que se basaba en la interacción de las moléculas (Poisson, 1829; p. 361). Esta división continuaba presente en la enseñanza de la Mecánica en la *École Polytechnique* a fines del siglo XIX, como lo demuestra Boussinesq en sus *Leçons Synthétiques de Mécanique Générale servant d’Introduction au Cours de Mécanique Physique* (Lecciones Sintéticas de Mecánica General que sirven como Introducción al Curso de Mecánica Física). Boussinesq era un defensor de la mecánica física e indicaba que la



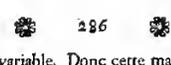
274

PRINCIPES GÉNÉRAUX DU MOUVEMENT DES FLUIDES. PAR M. EULER.

I.

Ayant établi dans mon Mémoire précédent les principes de l'équilibre des fluides le plus généralement, tant à l'égard de la diversité de qualité des fluides, que des forces qui y puissent agir ; je me propose de traiter sur le même pied le mouvement des fluides, & de rechercher les principes généraux, sur lesquels toute la science du mouvement des fluides est fondée. On comprend aisément que cette matière est beaucoup plus difficile, & qu'elle renferme des recherches incomparablement plus profondes : cependant j'espère d'en venir aussi heureusement à bout, de forte que s'il y reste des difficultés, ce ne sera pas du côté du mécanisme, mais uniquement du côté de l'analytique : cette science n'étant pas encore portée à ce degré de perfection, qui seroit nécessaire pour développer les formules analytiques, qui renferment les principes du mouvement des fluides.

II. Il s'agit donc de découvrir les principes, par lesquels on puisse déterminer le mouvement d'un fluide, en quelque état qu'il se trouve, & par quelques forces qu'il soit sollicité. Pour cet effet examinons en détail tous les articles, qui constituent le sujet de nos recherches, & qui renferment les quantités tant connues qu'inconnues. Et d'abord la nature du fluide est supposée connue, dont il faut considérer les diverses espèces : le fluide est donc, ou incompressible, ou compressible. S'il n'est pas susceptible de compression, il faut distinguer deux cas, l'un où toute la masse est composée de parties homogènes, dont la densité est partout & demeure toujours la même, l'autre



286

en supposant la seule x variable. Donc cette masse fluide Zz est repoussée dans la direction AO par la force motrice $dx dy dz \left(\frac{dp}{dx}\right)$, ou bien par la force accélératrice $= \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dx}\right)$. De même manière on verra que la masse fluide Zz est sollicitée dans la direction BO par la force accélératrice $= \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dy}\right)$, & dans la direction CO par la force accélératrice $= \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dz}\right)$. Ajoutons à ces forces les données P, Q, R , & les forces accélératrices entières seront :

$$\text{selon la direction } OA = P - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dx}\right)$$

$$\text{selon la direction } OB = Q - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dy}\right)$$

$$\text{selon la direction } OC = R - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dz}\right)$$

XXI. Nous n'avons donc qu'à égaliser ces forces accélératrices avec les accélérations actuelles que nous venons de trouver, & nous obtiendrons les trois équations suivantes :

$$P - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) + u \left(\frac{du}{dx}\right) + v \left(\frac{du}{dy}\right) + w \left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$Q - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u \left(\frac{dv}{dx}\right) + v \left(\frac{dv}{dy}\right) + w \left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$R - \frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dt}\right) + u \left(\frac{dw}{dx}\right) + v \left(\frac{dw}{dy}\right) + w \left(\frac{dw}{dz}\right)$$

Si nous ajoutons à ces trois équations premièrement celle, que nous a fournie la considération de la continuité du fluide :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

Figura 3. Artículo de Euler presentado en 1755 y publicado en 1757 en el que se deducen las ecuaciones que llevan su nombre. Primera página y página con las ecuaciones del movimiento de un fluido ideal. P, Q, R corresponden a las componentes según x, y, z del campo de fuerzas másicas, por unidad de masa y q es la densidad del fluido.

mecánica racional (o analítica) era insuficiente para el estudio de los fenómenos más importantes y que los “puntos materiales” que surgen de la hipótesis atómica para la constitución de la materia permiten explicar el comportamiento de la materia al considerar la interacción entre ellos (Boussinesq, 1889; Primera Lección).

La idea que la materia estaba compuesta por átomos no era nueva. Ya los filósofos presocráticos, en el siglo V a.C., Leucipo de Mileto y su discípulo Demócrito de Abdera la habían propuesto³. La concepción de que la materia está formada por átomos o partículas fundamentales fue transmitida a través de los siglos y comentada, modificada o cuestionada, por distintos autores, entre los que pueden mencionarse Galileo Galilei (1564-1642), Thomas Hobbes (1588-1679), Robert Boyle (1627-1691), Robert Hooke (1635-1703), Christiaan Huygens (1629-1695) e Isaac Newton (1642-1727), entre otros. De los antes mencionados, Boyle, Hooke y Newton consideraban que el calor estaba asociado a la vibración de los átomos o partículas básicas. El atomismo no estaba libre de detractores, especialmente por

³ Las ideas de Leucipo y Demócrito fueron reformuladas en la filosofía de Epicuro (c.341- c.270 a.C.) y la física atomista que de ella se deriva las presenta el poeta y filósofo romano Lucrecio (98-55 a.C.) en su obra en verso *De Rerum Natura* (De la Naturaleza de las Cosas). Rodríguez-Navas en su traducción al castellano, en prosa, publicada en 1892 dice “Deliberadamente, sin duda, Lucrecio no empleó ni una sola vez en todo su extenso poema la palabra átomo, que encierra el asunto más detenidamente estudiado en toda su obra” (Lucrecio, 1892; p. 4).

razones religiosas, como la que hacía San Dionisio de Alejandría en el siglo III y después, con mucha fuerza, en el periodo 1660-1700, cuando empezó a ser considerada con un enfoque más científico que filosófico. El Parlamento de Paris decretó en 1624 que quienes respaldaran o enseñaran el atomismo estarían sujetos a la pena de muerte (Whyte, 1961)⁴.

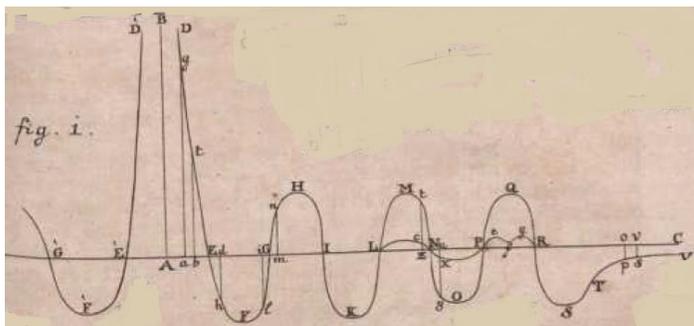
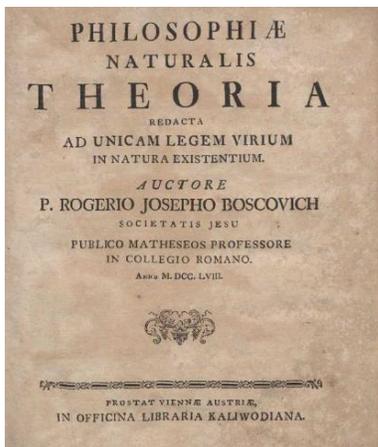
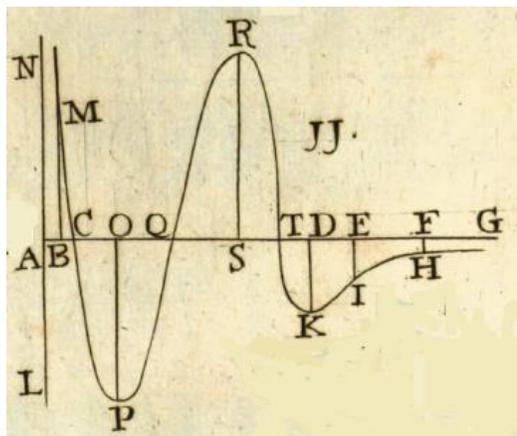
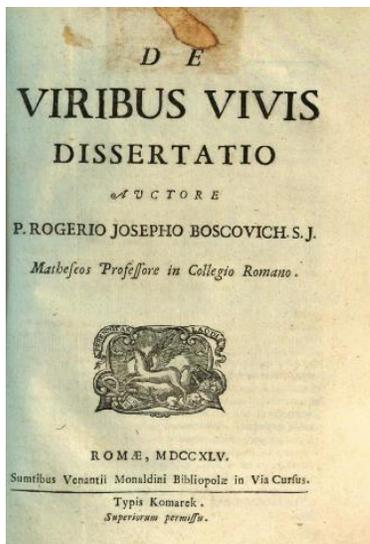


Figura 4. Fuerzas intermoleculares de atracción (bajo la línea horizontal de los gráficos) y repulsión (sobre la línea horizontal), según Boscovich. La línea vertical NAL en la figura superior y BA en la inferior corresponde a una distancia igual a cero entre los centros de las partículas o moléculas y la fuerza de repulsión se hace infinitamente grande. A medida que la separación aumenta la fuerza oscila entre repulsión y atracción. Cuando las partículas están lo suficientemente alejadas, ellas están afectas a fuerzas de atracción, similar a un modelo gravitacional newtoniano (Boscovich, 1745 y 1758).

En cuanto a las fuerzas entre partículas básicas, Newton en su *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (1687) postula que ellas pueden ser de repulsión o atracción (esta última distinta a la gravitacional) y así demuestra la ley de Boyle para los gases considerando

⁴ El Capítulo 4 del libro de Whyte contiene una Tabla Cronológica, que ha sido la base respecto a lo presentado acá relativo al desarrollo de las ideas atomistas.

que la fuerza de repulsión es inversamente proporcional a la distancia entre los centros de las partículas (Proposición XXIII, Teorema XVIII del Libro 2; Newton, 1974). Newton no escribe $pV = \text{constante}$, sino que lo hace de manera descriptiva, sin ecuaciones. Otro importante aporte relativo a las fuerzas de interacción de las partículas es la realizada por el croata Rudjer Josip Bošković (1711-1787, también llamado Ruggero Giuseppe Boscovich), quien publicó dos importantes obras relacionadas con la estructura atómica (o molecular) de la materia: en 1745 *De Viribus Vivis Dissertatio* y en 1758 *Theoria Philosophiæ Naturalis*, con un edición revisada y mejorada en 1763. En ellas postula la existencia de fuerzas de atracción y repulsión entre átomos (o moléculas), dependiendo de la distancia entre ellos. Si los átomos están suficientemente alejados la fuerza es de atracción newtoniana (proporcional al inverso del cuadrado de la distancia), pero cuando ellos están muy cerca es de repulsión, asintóticamente tendiendo a un valor infinito cuando la separación se acerca a cero. Entre estos dos comportamientos extremos, la fuerza es finita y oscila entre atracción y repulsión. En la Fig. 4 se presenta la representación gráfica de estas fuerzas, tomados de las publicaciones de Boscovich de 1745 y de 1758.

Pierre Simon Laplace (1749-1827) considera la estructura molecular de la materia y la presenta en sus sucesivas ediciones de *Exposition du Système du Monde* (1796, 1799 y 1808), en cada una de las cuales mejora sus argumentos. En una publicación de 1805 explica el ascenso capilar mediante un enfoque molecular (Laplace, 1805; p. 1) e indica que estas fuerzas de atracción de las moléculas “son insensibles a distancias sensibles”. Esta idea de fuerzas moleculares cuya acción espacial es muy limitada la refina en la tercera edición de su *Exposition*, en la que en el Libro Cuarto incluye un capítulo titulado “De la atracción molecular” (Laplace, 1808) donde refuerza la idea que las fuerzas moleculares son “sensibles solamente a distancias imperceptibles”. Las moléculas están sometidas a una fuerza de atracción decreciente con extrema rapidez (Laplace, 1808; p. 316) y a una que se le opone, debido al calor la que, además, tiene el efecto de disminuir su viscosidad o adhesión intermolecular (Laplace, 1808; p. 317).

4. LA ECUACIÓN DE NAVIER

Con los conceptos de fuerzas intermoleculares antes presentados es que Navier aborda su estudio del movimiento de los fluidos. Son dos los artículos en los que Navier deduce y presenta su ecuación, para fluidos incompresibles. El primero, publicado en 1821 en los *Annales de Chimie et de Physique* (Fig. 5), con el título *Sur les Lois des mouvemens des fluides, en ayant egard à l'adhesion des molecules* no detalla el álgebra de la deducción del término asociado a la resistencia del flujo. Las ecuaciones de momentum a las que llega Navier se presenta en la Fig. 6, donde X, Y y Z corresponden a las componentes de la fuerza másica, que unas líneas más adelante, considera que es la gravitacional. Notar que en la notación de la época no se diferencia entre la derivada parcial $\partial u / \partial x, \dots$, de la total $du / dx, \dots$. Es interesante ver que los términos asociados a la resistencia molecular (aquellos que acompañan al coeficiente ε) no los presenta reducidos al utilizar la ecuación de continuidad. Por ejemplo, usando la notación actual, el término en paréntesis para la componente según x puede escribirse como:

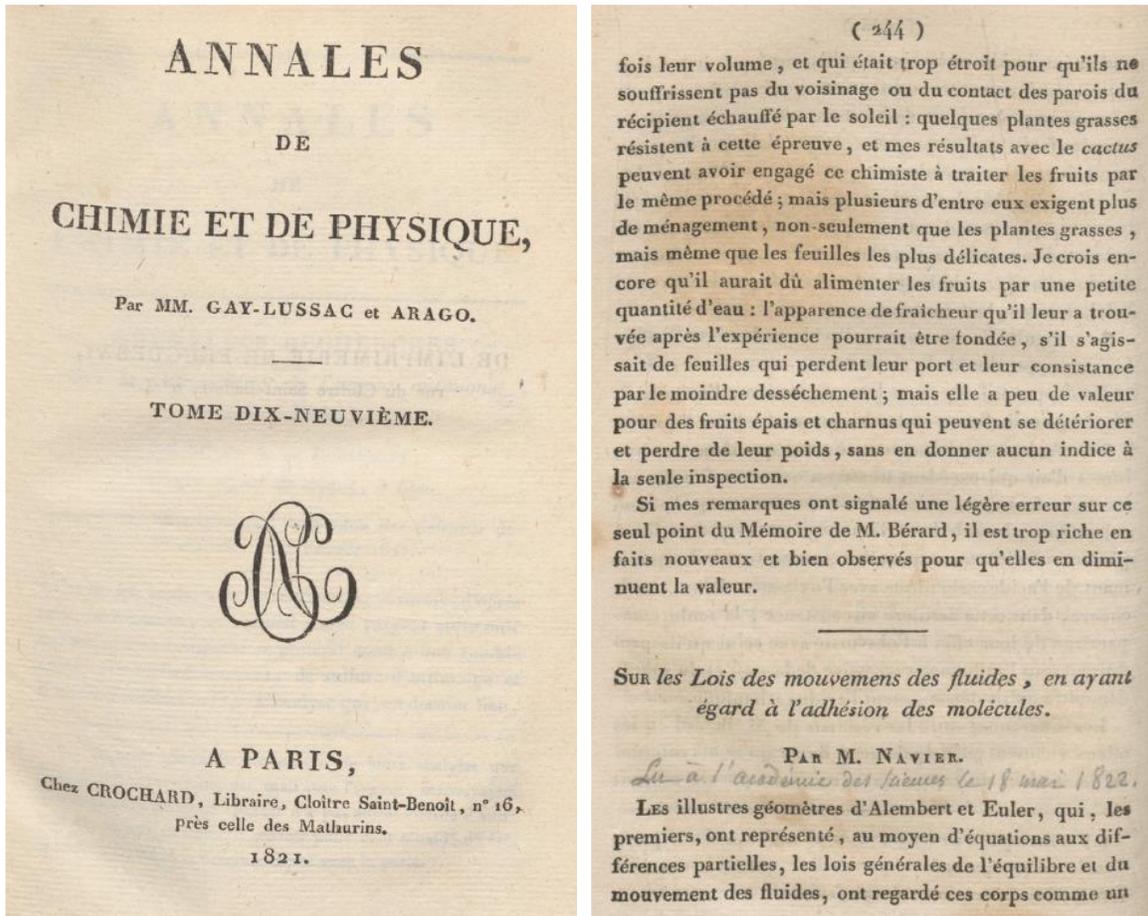


Figura 5. Primer artículo de Navier en el que presenta la resistencia del flujo debido a las fuerzas intermoleculares del fluido (Navier, 1821).

$$\begin{aligned}
 & 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\
 & = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Reduciéndose a $\nabla^2 u$ cuando se impone la ecuación de continuidad para un fluido incompresible:

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u \tag{2}$$

La primera aplicación que hace Navier de sus ecuaciones corresponde al flujo generado por un gradiente de presiones en una tubería inclinada, muy larga (en la dirección x), de sección

rectangular, de tal manera que “todas las moléculas del fluido se mueven paralelamente entre ellas”. El fluido está inicialmente en reposo, por lo que la solución depende de (y, z, t) . La condición de borde corresponde a velocidad nula en la pared, la que Navier justifica con el argumento “... existe contra las paredes sólidas una capa extremadamente delgada de fluido inmóvil, o que estas paredes están formadas por la sustancia misma del fluido, que se habría solidificado”. Para un tiempo cualquiera la distribución de velocidades ocupa un par de líneas y para $t \rightarrow \infty$, se reduce a la expresión presentada en la Fig. 7. En dicha ecuación ζ es la carga hidráulica y λ la longitud de la tubería. ε es el coeficiente de atracción molecular, que Navier dedujo de manera rigurosa y presentó en su trabajo de 1822.

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X + \varepsilon \left(3 \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} + 2 \frac{d^2 v}{dx dy} + 2 \frac{d^2 w}{dx dz} \right) - \frac{du}{dt} - \frac{du}{dx} \cdot u - \frac{du}{dy} \cdot v - \frac{du}{dz} \cdot w;$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y + \varepsilon \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + 3 \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} + 2 \frac{d^2 u}{dx dy} + 2 \frac{d^2 w}{dy dz} \right) - \frac{dv}{dt} - \frac{dv}{dx} \cdot u - \frac{dv}{dy} \cdot v - \frac{dv}{dz} \cdot w;$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z + \varepsilon \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + 3 \frac{d^2 w}{dz^2} + 2 \frac{d^2 u}{dx dz} + 2 \frac{d^2 v}{dy dz} \right) - \frac{dw}{dt} - \frac{dw}{dx} \cdot u - \frac{dw}{dy} \cdot v - \frac{dw}{dz} \cdot w;$$

Figura 6. Ecuaciones de momentum según Navier (1821)

Con el objeto de comparar su resultado teórico con datos experimentales, Navier determinó la velocidad media para una tubería rectangular de lados b y c a partir de la expresión teórica para la distribución de velocidades, obtenida de las ecuaciones del movimiento (Fig. 7), la que contrastó con los resultados de las mediciones de Girard (1816, publicado en 1818).

$$u = \frac{\rho g \cdot \zeta}{\varepsilon \cdot \lambda} \frac{4^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{\pi^4} SS \frac{\sin \frac{m \pi y}{b} \sin \frac{n \pi z}{c}}{m n (m^2 c^2 + n^2 b^2)},$$

Figura 7. Distribución de velocidades para el escurrimiento en una tubería de sección rectangular (lados b y b), obtenida por Navier en su artículo de 1821. SS corresponde a la doble sumatoria sobre n y m , siendo ellos números impares. Existe un error en la expresión anterior, que es indicado al final de los *Annales* (pág. 448), ya que la densidad ρ no debe estar en la ecuación.

El 18 de marzo de 1822 Navier leyó en la Académie Royale des Sciences de Paris la *Mémoire sur les Lois du Mouvement des Fluides*, la que fue publicada en 1823 en el Tomo VI de las Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France (Fig. 8). En este trabajo, Navier considera al fluido como incompresible y constituido por “un conjunto de puntos materiales, o moléculas, ubicadas a distancias muy pequeñas las unas de otras, y susceptibles de cambiar casi libremente de posición relativa entre sí”. La presión que se ejerce sobre el fluido “y penetra en el interior del cuerpo”, “tiende a acercar las partes, que resisten esta acción por fuerzas repulsivas que se establecen entre las moléculas vecinas”. En la condición hidrostática, “cada molécula está en equilibrio, sujeta a estas fuerzas de repulsión y a las fuerzas externas, como la gravedad, que pueden actuar sobre ella”. Además, “las acciones ejercidas de molécula en molécula, dentro de los cuerpos, varían con la distancia de las moléculas”, de tal manera que si se reduce la distancia entre ellas, se genera una fuerza de repulsión y si se aumenta, se crea una fuerza de atracción. Cuando el fluido está en movimiento, Navier considera que “dos moléculas que se aproximan se repelen con más fuerza, y que dos moléculas que se alejan se repelen con menos fuerza”, de tal manera que “las acciones repulsivas de las moléculas aumentan o disminuyen en una cantidad proporcional a la velocidad con que las moléculas se acercan o se separan unas de otras”. Estas mismas fuerzas también actúan entre las moléculas del fluido con las de las paredes del sólido que las contiene.

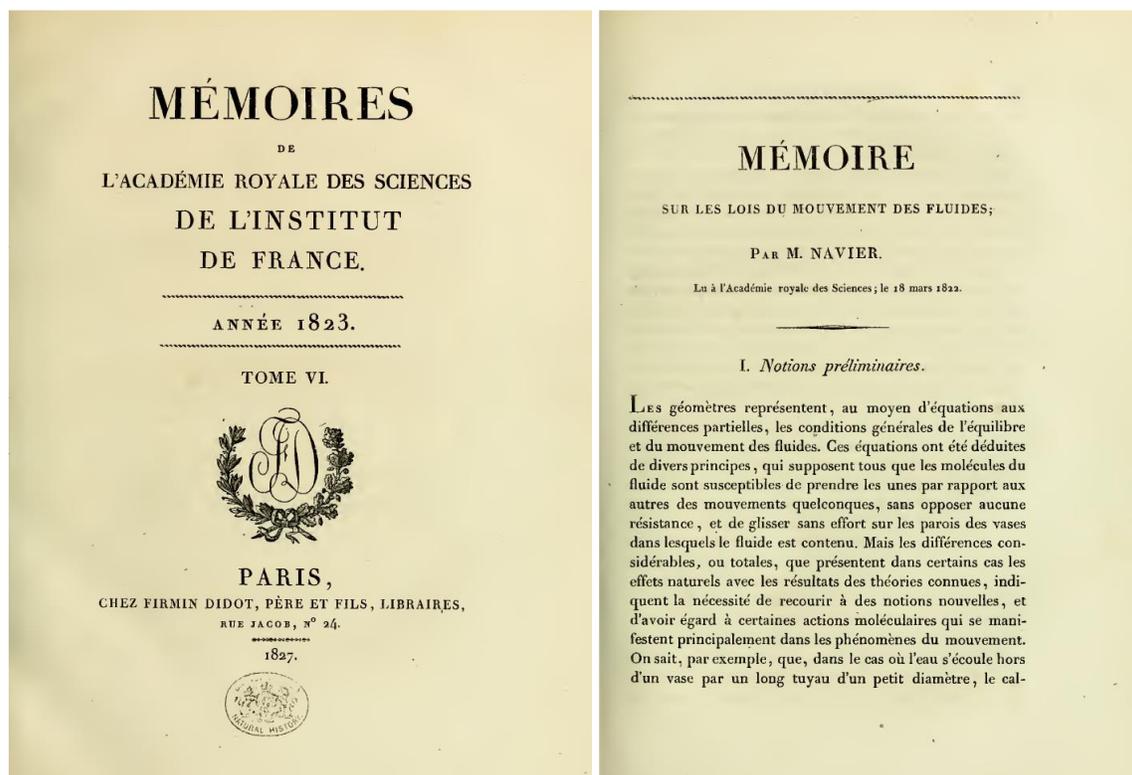


Figura 8. Segundo artículo de Navier respecto a las leyes de movimiento de los fluidos, el que fue leído el 18 de marzo de 1822 en la Académie Royales des Sciences de Paris. Acá Navier desarrolla en detalle las fuerzas de atracción intermolecular que dan origen al término asociado a la resistencia del flujo.

Para la condición de equilibrio hidrostático, Navier analiza la interacción entre dos moléculas vecinas, M y M' (Fig. 9), de coordenadas (x, y, z) y $(x + \alpha, y + \beta, z + \gamma)$, de tal manera que la distancia entre ellas es $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$. Es necesario acá advertir que en el artículo se utiliza ρ indistintamente para indicar la distancia entre las dos moléculas M y M' como para designar la densidad del fluido. Designando como $f(\rho)$ la fuerza entre las dos moléculas, y $f(\rho)\delta\rho$ el momento de $f(\rho)$ entre las dos moléculas, el elemento de fuerza sobre la molécula M resultante debido a la acción de las 8 que la rodean en un arreglo como el indicado en la Fig. 9, resulta ser (usando la notación actual para las derivadas parciales):

$$\frac{8f(\rho)}{\rho} \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} \alpha^2 + \frac{\partial \delta y}{\partial y} \beta^2 + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \gamma^2 \right) \quad (3)$$

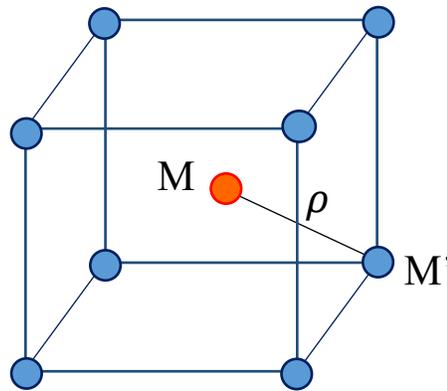


Figura 9. Esquema para el análisis de la interacción de fuerzas intermoleculares.

En la condición estática, donde existe un equilibrio entre la fuerza de presión y las repulsivas, se cumple:

$$p = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} \rho^3 f(\rho) d\rho \quad (4)$$

Navier termina relacionando la presión con las fuerzas másicas para la situación hidrostática, que con la notación actual se escribe como $\nabla p = \rho \vec{f}_m$, donde \vec{f}_m es el vector de fuerzas másicas (por unidad de masa) y en este caso ρ designa la densidad del fluido.

Una vez resuelto el problema estático, Navier aborda el caso en que el fluido está en movimiento, lo que induce otras fuerzas de interacción molecular, siendo “la búsqueda de expresiones analíticas de estas fuerzas el objeto principal” del trabajo. Para ello, considera que existe un movimiento relativo entre las moléculas M y M', cuyas velocidades son respectivamente (u, v, w) y

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \gamma, \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \gamma, \quad w + \frac{\partial w}{\partial x} \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \beta + \frac{\partial w}{\partial z} \gamma \right),$$

obteniendo que el momento de las fuerzas que resultan de la acción mutua de M y M' está dado por

$$\begin{aligned}
 & \frac{f(\rho)}{\rho^2} \left[\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x} \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \gamma \right) + \beta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \gamma \right) \right. \\
 & \quad \left. + \gamma \left(\frac{\partial w}{\partial x} \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \beta + \frac{\partial w}{\partial z} \gamma \right) \right] \times \\
 & \left[\alpha \left(\frac{\delta \partial u}{\partial x} \alpha + \frac{\delta \partial u}{\partial y} \beta + \frac{\delta \partial u}{\partial z} \gamma \right) + \beta \left(\frac{\delta \partial v}{\partial x} \alpha + \frac{\delta \partial v}{\partial y} \beta + \frac{\delta \partial v}{\partial z} \gamma \right) \right. \\
 & \quad \left. + \gamma \left(\frac{\delta \partial w}{\partial x} \alpha + \frac{\delta \partial w}{\partial y} \beta + \frac{\delta \partial w}{\partial z} \gamma \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5}$$

A partir de la interacción entre dos moléculas, dada por la expresión anterior, Navier obtiene el resultado de las ocho que la rodean, el que se presenta en la Fig. 10.

$$\frac{8 \cdot f(\rho)}{\rho^2} \left(\begin{aligned}
 & \left(\frac{du}{dx} \frac{\delta du}{dx} \alpha^4 + \frac{du}{dy} \frac{\delta du}{dy} \alpha^2 \beta^2 + \frac{du}{dz} \frac{\delta du}{dz} \alpha^2 \gamma^2 \right) + \\
 & \left(\frac{dv}{dy} \frac{\delta dv}{dx} \alpha^2 \beta^2 + \frac{dv}{dx} \frac{\delta dv}{dy} \alpha^2 \beta^2 \right) + \\
 & \left(\frac{dw}{dz} \frac{\delta dw}{dx} \alpha^2 \gamma^2 + \frac{dw}{dx} \frac{\delta dw}{dz} \alpha^2 \gamma^2 \right) + \\
 & \left(\frac{du}{dx} \frac{\delta dv}{dy} \alpha^2 \beta^2 + \frac{du}{dy} \frac{\delta dv}{dx} \alpha^2 \beta^2 \right) + \\
 & \left(\frac{dv}{dx} \frac{\delta dv}{dx} \alpha^2 \beta^2 + \frac{dv}{dy} \frac{\delta dv}{dy} \beta^4 + \frac{dv}{dz} \frac{\delta dv}{dz} \beta^2 \gamma^2 \right) + \\
 & \left(\frac{dw}{dy} \frac{\delta dv}{dz} \beta^2 \gamma^2 + \frac{dw}{dz} \frac{\delta dv}{dy} \beta^2 \gamma^2 \right) + \\
 & \left(\frac{du}{dx} \frac{\delta dw}{dz} \alpha^2 \gamma^2 + \frac{du}{dz} \frac{\delta dw}{dx} \alpha^2 \gamma^2 \right) + \\
 & \left(\frac{dv}{dy} \frac{\delta dw}{dz} \beta^2 \gamma^2 + \frac{dv}{dz} \frac{\delta dw}{dy} \beta^2 \gamma^2 \right) + \\
 & \left(\frac{dw}{dx} \frac{\delta dw}{dx} \alpha^2 \gamma^2 + \frac{dw}{dy} \frac{\delta dw}{dy} \beta^2 \gamma^2 + \frac{dw}{dz} \frac{\delta dw}{dz} \gamma^4 \right)
 \end{aligned} \right)$$

Figura 10. Resultante sobre la molécula M de los momentos de las fuerzas de las moléculas que la rodean (Navier, 1822).

Como se indicó, la expresión de la Fig. 10 corresponde al efecto que tiene sobre una molécula las que la rodean. Para considerar todas las moléculas del fluido, es necesario integrar sobre todo el dominio del flujo, el que puede considerarse infinito desde el punto de vista de las dimensiones asociadas a las moléculas. Esta integración se facilita al trabajar en coordenadas esféricas, resultando:

$$\varepsilon = \frac{8\pi}{30} \int_0^{\infty} \rho^4 f(\rho) d\rho \quad (6)$$

En la determinación del valor de ε , Navier indica que se consideró el doble de la suma de momentos, por lo que el coeficiente numérico de la Ec. 6 debe dividirse por 2. Navier repite el análisis para el caso de las moléculas que están en contacto con la pared sólida (las que denota m), con una fuerza de interacción $F(\rho)$, resultando:

$$E = \frac{4\pi}{6} \int_0^{\infty} \rho^2 F(\rho) d\rho \quad (7)$$

E es una constante que debe determinarse experimentalmente y que depende de la naturaleza de la pared y del fluido y que puede considerarse “como la medida de su acción recíproca. Después de hacer el equilibrio dinámico y mucha álgebra, Navier obtiene el conjunto de ecuaciones diferenciales que según Navier rige el movimiento de los fluidos incompresibles (Fig. 11, donde P, Q y R son las componentes de la fuerza másica por unidad de volumen, i.e. $(P, Q, R) = \rho \vec{f}_m$) y que al considerar el campo de fuerzas como el gravitacional, en la notación actual es:

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (9)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \varepsilon \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (10)$$

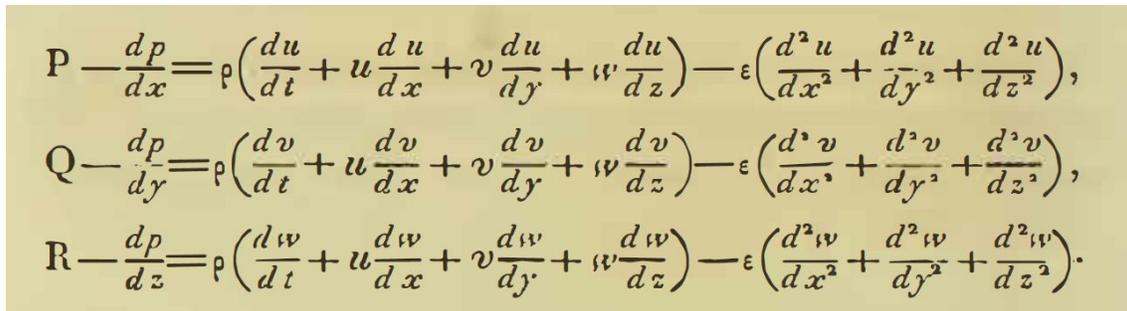


Figura 11. Ecuaciones del movimiento de los fluidos según Navier (1822)

Notar que en las ecuaciones anteriores no se conoce el coeficiente ε , ya que depende de la fuerza intermolecular $f(\rho)$, de la que solo se sabe que decrece muy rápidamente con la distancia, por lo que su radio de acción es muy pequeño (“son insensibles a distancias sensibles”, como escribió Laplace). También se sabe que “esta constante tiene valores diferentes para distintos fluidos y que varía sensiblemente para cada fluido con la temperatura” y que es “sensiblemente independiente” de la presión (Navier, 1821; p. 251).

Respecto a las condiciones de borde, Navier indica que las moléculas de fluido en contacto con la pared no pueden moverse en la dirección normal a ella, de tal manera que para una pared en el plano XY debe satisfacerse

$$Eu + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad , \quad Ev + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

Del mismo modo, para paredes en los planos XZ e YZ :

$$Eu + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad Ew + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

$$Ev + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad Ew + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

En el caso de una superficie libre se tiene $E = 0$. Las condiciones de borde dadas por las Ecs. 11-13, se denominan ahora “condiciones de Navier” y permiten una velocidad de deslizamiento en la pared y se aplican, por ejemplo, en la modelación del flujo de fluidos superhidrofóbicos.

Navier termina su trabajo aplicando las ecuaciones obtenidas para tres casos: i) flujo en una tubería rectilínea de sección rectangular, ii) flujo en una tubería rectilínea de sección circular, y iii) flujo con superficie libre en un canal de sección rectangular. Para los tres casos, las condiciones de borde que utiliza son aquellas de las ecuaciones precedentes. Los problemas en tuberías son transitorios, el flujo parte del reposo y alcanzan asintóticamente la condición permanente. El flujo del caso i) es el mismo que resolvió en la publicación de 1821, pero en esa oportunidad las condiciones de borde aplicadas no fueron las de Navier, sino las de no deslizamiento en las paredes.

5. VISCOSIDAD

Antes de continuar, no está de más repasar la historia de la palabra y concepto de viscosidad de los fluidos. Es común que en los cursos introductorios de mecánica de fluidos se presente la propiedad “viscosidad” a partir de un flujo con líneas de corrientes paralelas (Fig. 12) y postulando la proporcionalidad entre el esfuerzo de corte (τ) aplicado a un elemento de fluido y su tasa de deformación angular ($d\alpha/dt$, la que se demuestra que es igual al gradiente de velocidad du/dy). El coeficiente de proporcionalidad corresponde a la viscosidad dinámica. Es así como se muestra, por ejemplo, en los textos de White (2004, pp. 22-23), Massey (2006, pp. 21-24) y Munson et al (2009, pp. 14-15) donde se plantea que $\tau \sim d\alpha/dt$. Directamente

en la forma como lo plantea Newton, o sea $\tau \sim du/dy$, se presenta, entre otros, en los textos de Granger (1995, pp. 41-43), Streeter et al (1999, pp. 8-9) y Shames (2001, pp. 10-12).

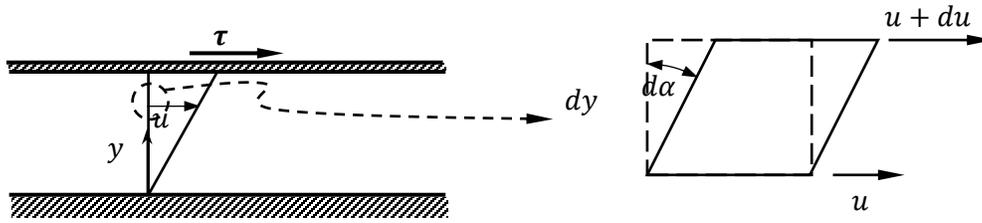


Figura 12. Esquema típico usado para introducir el concepto de viscosidad en los textos usuales de los cursos introductorios de mecánica de fluidos. Usualmente se postula $\tau \sim d\alpha/dt$ o $\tau \sim du/dy$.

Newton (1687 y ediciones posteriores) no plantea el movimiento rectilíneo paralelo de la Fig. 12, sino que establece la proporcionalidad entre esfuerzo de corte y gradiente de velocidad en la parte de su *Principia* relativa al movimiento circular de los fluidos. En el Libro II, Sección IX (Fig. 13), postula que “la resistencia que surge de la falta de lubricidad en las partes de un fluido es, manteniéndose las otras cosas iguales, proporcional a la velocidad con que las partes del fluido se separan unas de otra” (Newton, 1726, traducción al inglés de Cajori, 1974).

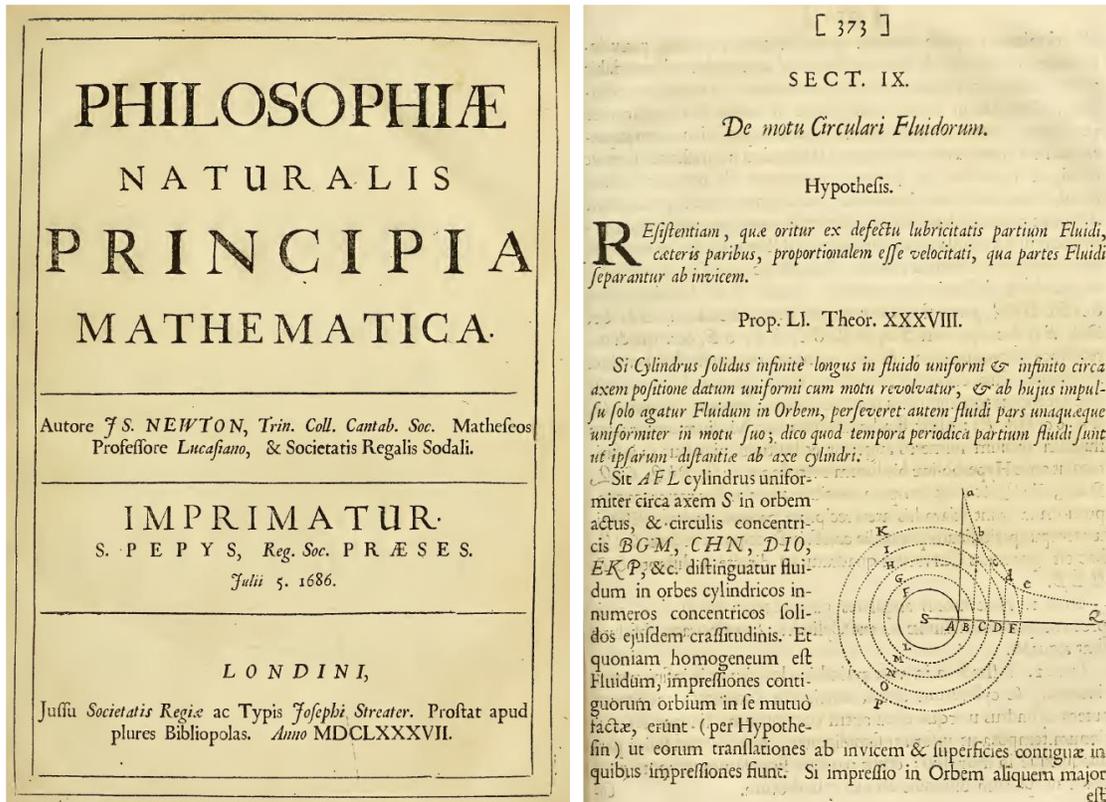


Figura 13. Primera edición (1687) de los *Principia* de Newton. Primera página de la obra y la correspondiente a la Sección IX del Libro II “Sobre el movimiento circular de los fluidos”, donde postula, usando el lenguaje y notación actual, que $\tau \sim du/dy$.

Notar que Newton no menciona la palabra “viscosidad” o “viscoso”, sino que se refiere a la “lubricidad” de las partículas de fluido. Según el Online Etymology Dictionary, www.etymonline.com, la palabra *viscosity* se registra por primera vez (en inglés) a comienzos del siglo XV, y proviene del francés antiguo *viscosite*, donde se encuentra registrada en el siglo XIII, o directamente del latín medieval (s. VI-XIV) *viscositatem/viscositas*, palabra que, a su vez, viene del latín tardío (s. III-VI) *viscosum*, que significa “pegajoso”. Esta última proviene del latín *viscum*, que se refiere al muérdago, planta semiparásita que crece en las ramas de ciertos árboles y cuyo fruto es una baya que contiene la semilla en una pulpa pegajosa (o viscosa). En castellano (<https://iedra.es/>), el primer registro de la palabra viscoso (pegajoso) en un diccionario es en 1570, en el *Vocabulario de las dos lenguas Toscana y Castellana*, de Cristóbal de las Casas, y el de la palabra viscosidad en 1617 en el *Vocabularium Hispanicum Latinum et Anglicum copiosissimum* de John Minsheu (Fig. 14). La Real Academia Española, fundada en 1713, registra ambas palabras en su primera edición del Tomo Sexto del Diccionario de la Lengua Castellana, impreso en 1739 (pp. 437 y 438), con el significado de “materia, o humor pegajoso, o glutinoso” para viscosidad y de “pegajoso o glutinoso” para viscoso. El registro más antiguo de la palabra viscoso que encontró el autor en la literatura chilena corresponde a la de Diego de Rosales en su obra *Historia General de el Reyno de Chile*, escrita en el segundo tercio del siglo XVIII⁵, pero impresa por primera vez en 1877. En el Tomo I, Capítulo IX, al describir la yerba que “llaman Tequel-tequel es provechosisima para muchas enfermedades ...Y para purgar el vientre y la madre de los humores viscosos, que padecen las mujeres” (Rosales, 1877; p. 239). Escritas y publicadas en el siglo siguiente del escrito de Rosales, en las obras del Abate Molina aparecen tanto las palabras viscoso como viscosidad (Molina, 1776, en italiano; 1788 en castellano; y Molina 1782, en italiano).

El primer uso del término viscosidad con un sentido físico fue en 1856 por Wiedemann, en un estudio relacionado con el flujo inducido por electrólisis en soluciones salinas, utilizando la expresión *Zähigkeitconstante der Flüssigkeiten*, “constante de viscosidad de los líquidos” (Wiedemann, 1856; Fig. 15). Notar que, ni Cauchy (1823), ni Poisson (1831), ni Saint-Venant (1843), ni Stokes (1845) utilizaron la palabra “viscosidad” en sus publicaciones relativas a las ecuaciones del movimiento de los fluidos. Stokes en su trabajo expresa “La cantidad de fricción interna del agua depende del valor de μ ”, sin definir explícitamente qué es el coeficiente μ . Más de 20 años después, el uso del término viscosidad podía incluso perjudicar la publicación de un artículo. Esto se refleja en una de las cartas de la nutrida correspondencia que mantuvieron Saint-Venant y Boussinesq. En una carta fechada el 12 de

⁵ Benjamín Vicuña Mackenna, quien logró conseguir el manuscrito original e imprimirlo en 1877 incluye una biografía del autor y detalla las vicisitudes de la obra, que no llegó a imprimirse en el siglo XVIII, así como los esfuerzos para que al fin llegara a la prensa. El manuscrito contaba con todas las autorizaciones y pasado las censuras que permitían su publicación. Las aprobaciones están fechadas 22 de marzo de 1665 por el P. Alonso de Salinas y Córdova, Provincial de la Provincia de Chile; el 4 de enero de 1666 por Fray Valentín de Córdova, Provincial de la M. Religiosa de la Provincia de S. Lorenzo de Chile, Tucumán y Río de la Plata; el 28 de marzo de 1666 por Fray Antonio Valles, Provincial de la Provincia de Chile; y el 31 de marzo de 1666, por el P. Nicolás de Lillo, Comisario del Santo Oficio de la Inquisición en el Obispado de la Imperial. Las censuras fueron hechas por el Dr. D. Pedro de Careaga, Comisario del Santo Oficio y del Tribunal de la Santa Cruzada (sin fecha), por Fray Juan de San Buenaventura, Ministro Provincial, el 26 de marzo de 1666 y por el Dr. D. Francisco Ramírez de León, Comisario del Santo Oficio de la Inquisición, el 29 de marzo de 1673. Aunque ya en 1673 contaba con todas las licencias, según Benjamín Vicuña Mackenna, “el autor continuó su obra más tarde hasta 1674 y probablemente hasta una época posterior de dos o tres años”.

julio de 1868, el ya septuagenario Saint-Venant aconseja al veinteañero Boussinesq, respecto a un manuscrito que este último quería publicar, que evitara usar “viscosidad” en el título y otros lugares del trabajo, ya que eso daría argumentos al revisor para hacer observaciones y dificultar así la aceptación del artículo, sugiriéndole que “cambie el título por ejemplo a: La influencia de la fricción interna y externa (o acciones tangenciales) en el movimiento de los fluidos”. Prontamente, el 14 de julio, Boussinesq respondió “Creo que debo decirle de inmediato que no hay ninguna oposición a usted en mi manuscrito que trata sobre la fricción de los fluidos ... uso el término fricción en todas partes en lugar del término viscosidad” (Hager et al., 2021).



Figura 14. Primera página de las publicaciones donde aparecen por primera vez las palabras viscoso (1570) y viscosidad (1617) en lengua castellana.

6. LAS OTRAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE LOS FLUIDOS

La ecuación que presentó Navier en 1822 fue rederivada al menos cuatro veces más: Cauchy en 1823, Poisson en 1829, Saint-Venant en 1837 y Stokes en 1845. Cada uno de los autores de las nuevas derivaciones ignoraba o criticaba el desarrollo de sus antecesores, justificando las bases conceptuales de su propia deducción (Darrigol, 2002). Es interesante notar la estrecha relación entre el desarrollo de las ecuaciones que rigen el movimiento de los fluidos con las de los sólidos elásticos. Desarrolladas para una materia, se aplicaban los conceptos

I. Ueber die Bewegung der Flüssigkeiten im Kreise der geschlossenen galvanischen Säule und ihre Beziehungen zur Elektrolyse; von G. Wiedemann.

§. 1.

In einer früheren Untersuchung *) hatte ich mich bemüht, die Bewegung der Flüssigkeiten durch poröse Wände mittelst des galvanischen Stromes genauer zu erforschen. Es hatten sich dabei folgende Beziehungen zwischen jener Erscheinung und den sonstigen Wirkungen des galvanischen Stromes ergeben:

- 1) Die Flüssigkeiten bewegen sich alle vom positiven zum negativen Pol der galvanischen Säule.
- 2) Die in der Zeiteinheit durch eine poröse Wand fortgeführte Flüssigkeitsmenge ist der Intensität des angewandten galvanischen Stromes direct proportional; sie ist unabhängig von der Oberfläche und der Dicke der porösen Wand.
- 3) Die Flüssigkeitsmenge ändert sich mit der Natur der Flüssigkeit und ist unter sonst gleichen Verhältnissen um so größer, je kleiner das Leitungsvermögen derselben ist.
- 4) Die bewegende Kraft des galvanischen Stromes, gemessen durch eine Druckhöhe, welche der Fortführung der Flüssigkeit durch denselben das Gleichgewicht hält, ist direct proportional der Intensität des Stromes und der Dicke der porösen Wand; und umgekehrt proportional der Oberfläche derselben.

*) Ueber die Bewegung von Flüssigkeiten im Kreise der geschlossenen Säule. Diese Annalen Bd. LXXXVII, S. 321. Poggendorff's Annal. Bd. XCIX.

durch eine Druckhöhe von Quecksilber gemessen, welche auf der Seite der negativen Elektrode angebracht, genau der fortführenden Wirkung des galvanischen Stromes das Gleichgewicht hielt.

Eine Vereinigung dieses Resultates mit den in §. 6 entwickelten Anschauungen schien nahe zu liegen. Namentlich mußte die dort ausgesprochene Beziehung, nach welcher die Zunahme des Volumens der Lösung am negativen Pol bei der Anwendung einer Thonwand dem Salzgehalt der Lösung umgekehrt entspricht, mit jenem Resultat der früheren Arbeit übereinstimmen.

Bei der Bewegung der Flüssigkeiten durch die Thonwand vermöge des galvanischen Stromes muß stets die Reibung der Flüssigkeiten in derselben überwunden werden. Wir werden uns eine solche poröse Wand als ein System sehr enger Röhren vorstellen können.

Nach den Versuchen von Hagen und Poiseuille sind die Quantitäten (q) verschiedener Flüssigkeiten, welche durch einen hydrostatischen Druck durch sehr enge Röhren bewegt werden, den Druckhöhen (h) direct, der Länge der Röhren λ umgekehrt und der vierten Potenz ihrer Radien (r^4) direct proportional. Endlich sind sie einer für die verschiedenen Flüssigkeiten sich ändernden Constante z umgekehrt entsprechend, welche letztere wir vorläufig mit dem Namen der Zähigkeitsconstante der Flüssigkeiten bezeichnen können. Es wird demnach seyn

$$q = \frac{hr^4}{z\lambda} \text{ const.}$$

Es schien für die vorliegende Untersuchung von Wichtigkeit, diese Zähigkeit der Flüssigkeiten ein wenig weiter zu verfolgen.

Die Kraft der Cohäsion der Flüssigkeiten kann man im Allgemeinen in doppelter Weise betrachten. Das eine Mal kann man die Kraft bestimmen, welche erforderlich ist, um zwei Flüssigkeitstheilchen völlig von einander zu reißen; es würde diejenige Größe seyn, welche unmittelbar der Festigkeit der festen Körper entspricht. So-

Figura 15. Artículo de Wiedemann (1856) donde se introduce por primera vez el término viscosidad con un sentido físico claro. La primera aparición del término está enmarcada y se denota con la letra z . La ecuación mostrada corresponde la caudal q en un flujo de Poiseuille y h denota el gradiente de presión, r el radio del tubo, λ el largo del tubo. El valor de la constante, $\text{const} = \pi/8$, se obtiene fácilmente de la solución de la ecuación de Navier-Stokes y es una de las primeras aplicaciones que se hace de ellas en los cursos básicos de Mecánica de Fluidos.

para la otra, lo que en la práctica significa cambiar desplazamientos de las moléculas (sólidos) por desplazamientos por unidad de tiempo (fluidos). El trabajo de Darrigol (2002) presenta de manera amena (y usando la notación vectorial e indicial actual) este desarrollo paralelo. Sin entrar en mayores detalles respecto a la deducción hecha por los distintos autores (lo que es material suficiente para otro artículo), a continuación se presentan las ecuaciones que rigen el movimiento de los fluidos obtenidas por ellos. Lo que sigue toma en varios puntos como referencia base el artículo de Darrigol (2002).

6.1. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

El 30 de septiembre de 1822, Cauchy leyó los resultados de su estudio en la Académie Royale des Sciences de Paris, cuyo resumen fue publicado en 1823 en el *Bulletin des Sciences par la Société Philomathique de Paris* (Fig. 16). En su trabajo, Cauchy analizó el trabajo de Navier respecto a las fuerzas restitutivas de un sólido sometido a dilatación y flexión. Según este último, se requieren dos tipos de fuerzas restitutivas, pero Cauchy concluyó que no era necesaria la segunda si se consideraba que la primera no era perpendicular a la sección sobre la que actuaba. En otras palabras, la presión no actúa normal a la superficie, es decir, existen esfuerzos normales y tangenciales cuya resultante es un esfuerzo (“presión”) no perpendicular a la superficie. Aunque otros como Coulomb, Young y Navier habían considerado la presencia de lo que ahora denominamos esfuerzos de corte en ciertos problemas de rompimiento de vigas, Cauchy fue el primero en plantear la teoría de elasticidad basada en una definición general de esfuerzos internos. Cauchy demostró tres teoremas fundamentales de la elasticidad los que, usando el lenguaje actual, son los siguientes: i) el tensor de esfuerzos es un tensor de segundo rango (σ_{ij} es una matriz de 3×3), ii) el tensor de

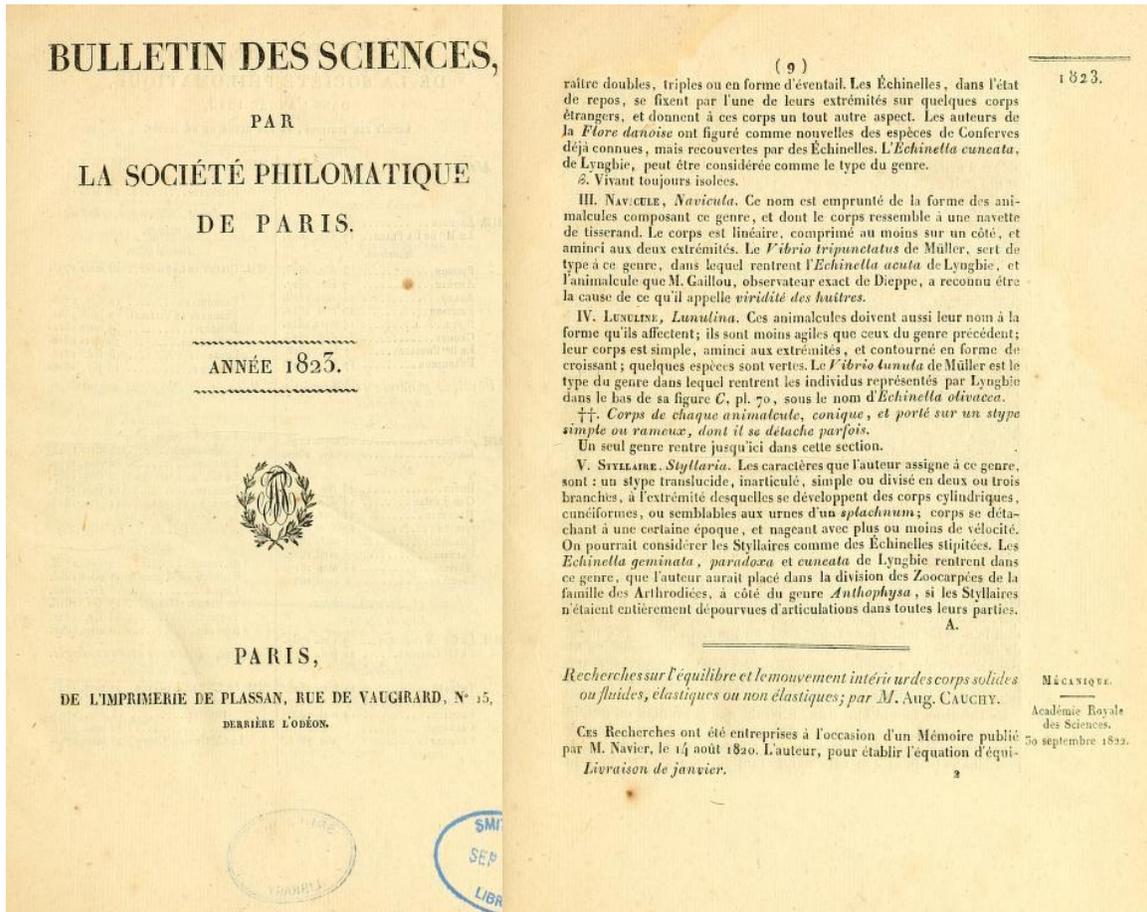


Figura 16. Primera página del resumen del trabajo de Cauchy leído el 30 de septiembre de 1822 en la Académie Royale des Sciences de Paris. El resumen se publicó en 1823 y comienza diciendo que se inspiró en una memoria publicada en 1820 por Navier relativo a la condición de equilibrio de un plano sólido elástico.

esfuerzo es simétrico ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), y iii) la resultante de las fuerzas que actúan sobre un elemento de volumen, por unidad de volumen, está dado por $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j$.

Para aplicar las ideas desarrolladas para cuerpos sólidos a los fluidos, Cauchy consideró un elemento infinitesimal de fluido solidificado, sobre cuyas superficies actúan esfuerzos normales y tangenciales, τ_{ij} . En su trabajo, Cauchy propuso una ley constitutiva de dos constantes, las que ahora denominamos viscosidad y segundo coeficiente de viscosidad.

6.2. Siméon-Denis Poisson (1781-1840)

A igual que Navier y Cauchy, Poisson estudió tanto el comportamiento de sólidos elásticos como el movimiento de los fluidos. En su artículo de 1828 (Poisson, 1829), Poisson sigue la línea de Navier para obtener las ecuaciones de la elasticidad, considerando las fuerzas de atracción molecular, con algunas diferencias. Por ejemplo, no utilizó el método de los momentos, sino que sumó directamente las fuerzas moleculares actuando sobre una determinada molécula. En su memoria, leída el 12 de octubre de 1829 en la Académie des Sciences de Paris y publicado en 1831 en el Journal de l'École Polytechnique (Fig. 17), considera que un elemento de fluido está sujeto a esfuerzos de corte durante su movimiento, los que espontáneamente se relajan muy rápidamente, alternando el fluido en rápidos estados de esfuerzo y relajación. Supuso que los esfuerzos sobre el elemento de fluido analizado son proporcionales a la tasa de deformación, en analogía a su supuesto que los esfuerzos que actúan sobre un elemento cuerpo sólido elástico isótropo son proporcionales a la deformación.

6.3. Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886)

Saint-Venant es conocido en el ámbito de la hidráulica por su deducción de las ecuaciones que llevan su nombre y que describen el movimiento transitorio gradualmente variado en canales (Saint-Venant, 1871; Fig. 18), pero las contribuciones en otros aspectos de la mecánica de fluidos, incluyendo su visionaria concepción de la turbulencia y, particularmente de la idea de una viscosidad turbulenta (que transmitió a Boussinesq, quien encontró expresiones para ellas), pasan muchas veces desapercibidas o, simplemente, ignoradas. Con una fuerte formación matemática, buscó compatibilizar las aplicaciones en ingeniería y el sustento científico proveniente del estado del conocimiento de la época respecto a la física de los cuerpos sólidos y fluidos, basado en el concepto de estructura molecular de la materia. Hay pocas dudas que desarrolló el cálculo vectorial en 1832, pero solo fue publicado en 1851 en las notas de clases (*Principes de mécanique fondés sur la cinématique*) usadas en los cursos dictados en el Institut Agronomique. Grassmann, quien publicó su trabajo en 1844, recibe los créditos como el inventor del cálculo vectorial. (MacTutor, 2022). A su muerte, a los 89 años, Saint-Venant había publicado alrededor de 160 artículos y varios más fueron publicados póstumamente. Su interés principal, así como sus mayores contribuciones, fue en el área de la elasticidad. Como datos curiosos, Saint-Venant introdujo el término “celeridad” para diferenciar la velocidad de propagación de una onda relativa a la velocidad del flujo, y los nombres de “río” y “torrente” para distinguir los regímenes subcrítico y super crítico (Rouse e Ince, 1963).

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

Sur les Équations générales de l'Équilibre et du Mouvement des Corps solides élastiques et des Fluides;

Lu à l'Académie des sciences, le 12 Octobre 1829.

PAR M. POISSON.

DANS les deux Mémoires que j'ai lus à l'Académie, l'un sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, l'autre sur l'équilibre des fluides, j'ai supposé ces corps formés de molécules disjointes, séparées les unes des autres par des espaces vides de matière pondérable, ainsi que cela a effectivement lieu dans la nature. Jusque-là, dans ce genre de questions, on s'était contenté de considérer les mobiles comme des masses continues, que l'on décomposait en éléments différentiels, et dont on exprimait les attractions et les répulsions par des intégrales définies. Mais ce n'était qu'une approximation, à laquelle il n'est plus

XXI. Cahier.

A

Figura 17. Artículo de Poisson en el que deriva las ecuaciones del movimiento de los fluidos, las que presenta en las Ecs. 9. X, Y y Z corresponden a las fuerzas másicas (componentes de la gravedad), el término ϖ está definido en la ecuación previa y corresponde a la presión más términos asociados a la compresibilidad del fluido. δ es el coeficiente que actualmente asociamos a la viscosidad.

En la edición del 19 de abril de 1834 de *L'Institut, Journal Général des Sociétés et Travaux Scientifiques de la France et de l'Étranger*,⁶ se presentan dos resúmenes de trabajos de Saint-Venant, presentados en la sesión del 14 de abril (Saint-Venant, 1834). El primero, en un corto párrafo, se refiere a un problema de mecánica general, relativo a las fuerzas vivas y trabajo. El segundo resumen ocupa casi toda una columna del periódico y es una reseña de estudios de dinámica de fluidos, en el que se menciona, entre otros temas abordados, la demostración de la existencia de presiones paralelas (resultantes de la *fricción*) y normales a la dirección del movimiento del fluido. Según Darrigol (2002), el trabajo completo nunca fue publicado. En 1843 Saint-Venant publicó una nota al trabajo de 1834, en el que da algunos detalles de las ideas desarrolladas casi una década antes. En la nota establece que existe una proporcionalidad entre las diferencias de presiones normales y presiones tangenciales, correspondiendo esta proporcionalidad al coeficiente ε de Navier o δ de Poisson, como se aprecia en la Fig.19. Consistente con su denominación de "presión" a lo que actualmente se llama "esfuerzo", utiliza la letra p en lugar de τ . Notar que la notación usada por Saint-Venant

⁶ Como el nombre del periódico lo indica, en él se daba a conocer resúmenes de trabajos presentados en las sesiones de distintas sociedades científicas de Francia y Europa. Un dato curioso es que *L'Institut* tenía librerías distribuidoras en nueve ciudades europeas (además de las francesas) y dos en América: una en Filadelfia, Estados Unidos y otra en Río de Janeiro, Brasil. Se editaba semanalmente.

152

PHYSIQUE

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{dp}{dt} + u \frac{dp}{dx} + v \frac{dp}{dy} + w \frac{dp}{dz}, \\ \frac{d\chi}{dt} &= \frac{d\rho}{dt} + u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz}, \end{aligned}$$

pour les coefficients différentiels de ψ et χ pris par rapport à t et à tout ce qui en dépend, qui sont contenus dans les expressions de $U, V, \&c.$

Les équations (8) conviendront à tous les fluides, homogènes et hétérogènes, dont la température et la compression varient d'une manière quelconque, soit avec le temps, soit d'un point à un autre. Le cas le plus simple, et que l'on considère ordinairement dans le mouvement des liquides et des fluides élastiques, est celui de l'homogénéité, d'une égale température, et d'une très-petite variation de densité, c'est-à-dire le cas où l'on peut regarder ρ comme une quantité constante, d'après ce qu'on vient de dire. Alors, si l'on effectue la substitution des valeurs de $U, V, \&c.$; que l'on ait égard à l'équation (2), et qu'on fasse, pour abrégér,

$$\varpi = p - a \frac{d\psi}{dt} - \frac{\varepsilon + \delta}{\chi^2} \frac{d\chi}{dt},$$

les équations (8) deviendront

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= \frac{d\varpi}{dx} + \mathcal{C} \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right), \\ \rho \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= \frac{d\varpi}{dy} + \mathcal{C} \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right), \\ \rho \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= \frac{d\varpi}{dz} + \mathcal{C} \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} \right). \end{aligned} \right\} (9)$$

De plus, dans le cas d'un liquide, on a, comme on l'a vu plus haut, à très-peu près $K = \gamma k \delta$; on a aussi $\chi^2 = D(1 - \gamma \delta)$, D étant la densité du liquide, dans son état naturel; et à cause de $K = \psi \tau$, $\mathcal{C} + \mathcal{C}' = 2a k$, on en conclura

$$\frac{\varepsilon + \delta}{\chi^2} \frac{d\chi}{dt} = - \frac{6a}{\gamma} \frac{d\psi}{dt};$$

es la misma que se utiliza ahora para indicar la dirección del esfuerzo y la normal de la superficie sobre el que actúe, es decir $p_{ij} = \tau_{ij}$. La nota termina con el párrafo identificado con 7 (Fig. 19), donde establece que “La solución, sin duda, no está aún completa, porque lo que precede no establece que ε sea el mismo en todos los puntos”. Este comentario, que puede parecerse erróneo si consideramos que ε lo asociamos a la viscosidad, no lo es al prestar atención a algunos párrafos de otros artículos de Saint-Venant. Por ejemplo, en su resumen de *L’Institut*, dice: “las moléculas, cuando pasan unas frente a otras, siguen necesariamente trayectorias ondulantes, y las oscilaciones de sus movimientos individuales alrededor del *movimiento medio* explican el rozamiento interior de los fluidos que es imprescindible tener en cuenta, así como la desigualdad entre las presiones en una dirección paralela y en una dirección normal a los movimientos”. En la publicación de 1843 en *Compte Rendu des Séances de l’Académie des Sciences* del artículo de 1834, en una nota al pie de página, Saint-Venant consideró importante aclarar que “las irregularidades parciales en el movimiento de un fluido obligan a tomar caras de cierta extensión para tener *promedios* que varíen regularmente”, es decir que en las caras del elemento de volumen se está considerando los valores de las velocidades y esfuerzos promediados sobre la superficie de la cara. Estas irregularidades en el movimiento, que no podían deducirse de la ecuación de Navier, surgen de la observación de experimentos en tuberías y canales, de un movimiento ondulatorio u oscilatorio, que actualmente asociamos a la turbulencia. En otro artículo, de tres páginas pero con un largo título: “Memoria sobre el Cálculo de los Efectos de las Máquinas de Vapor, que contiene ecuaciones generales del flujo permanente o periódico de fluidos, teniendo en cuenta sus dilataciones y sus cambios de temperatura y sin suponer que se mueven en secciones paralelas, ni por filetes independientes”, Saint Venant (1838) se refiere al trabajo de la *fricción ordinaria* y al trabajo de la *fricción extraordinaria*, determinado este último por el remolino de fluido (“*tournoiement du fluide*”), sobretodo en los lugares donde la sección de escurrimiento aumenta bruscamente. De este modo, es posible vislumbrar que el coeficiente ε de Saint-Venant incluye lo que en lenguaje actual se denomina tanto la viscosidad molecular como la viscosidad de remolinos. Sería Boussinesq quien desarrollaría en profundidad esta idea (que, sin duda había discutido con su mentor Saint-Venant) y la presentó en 1877 en su “*Essai sur la Théorie des Eaux Courantes*”. En la página 7 del ensayo, escribe “M. de Saint-Venant parece haber sido el primero en señalar la influencia de la agitación de remolinos en el coeficiente de fricción interna”. Más adelante, en la misma página indica que “todo lo que se sabe nos lleva a inferir que debe hacer crecer el coeficiente de esta proporcionalidad (ε) con las dimensiones de las secciones transversales” y que “esto puede explicarse hasta cierto punto notando que las láminas de fluido no se mueven paralelas entre ellas con velocidades regularmente gradadas de una a otra, y que las rupturas, los remolinos y los otros movimientos complicados u oblicuos, que deben influir mucho en la magnitud de la fricción, se forman y se desarrollan más todavía en las secciones grandes” (Saint-Venant, 1851, p. 49). En una nota de 1846 relativa a las “fuerzas retardadoras” del movimiento de los líquidos Saint-Venant indica que la fricción interna depende tanto de las velocidades relativas de las partículas de fluido como de las dimensiones de la sección y la distancia a la pared. Termina diciendo “esto es lo que podemos sospechar de hechos conocidos que son difíciles de explicar de otra manera” (Saint-Venant, 1846).

(147)

HYDRODYNAMIQUE. — *Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit; par M. DE SAINT-VENANT.*

« 1. Le Mémoire sur les *marées fluviales* de M. l'ingénieur des Ponts et Chaussées Partiot, qui vient d'être présenté à l'Académie, et dont j'ai inséré un Extrait au *Compte rendu* de la séance du 10 juillet 1871 (t. LXXIII, p. 91), contient une idée qui, étant complétée, et modifiée dans sa forme, me paraît pouvoir conduire à une solution, depuis longtemps désirée, du problème du mouvement *non permanent* des eaux dans les canaux découverts; ce qui comprend, outre les marées dont il est question, les *crues* des rivières, ainsi que le retrait de leurs eaux, temporairement gonflées par des pluies abondantes.

» 2. *Marée dans un canal.* — M. Partiot suppose, en effet, qu'à l'embouchure d'un fleuve auquel il substitue d'abord, pour simplifier, un canal prismatique rectangle à fond horizontal, la mer, en partant de son niveau le plus bas, s'élève par saccades ou par petits flots qui s'introduisent l'un après l'autre, et produisent dans le canal une suite d'intumescences de hauteur très-petite. La première de ces intumescences s'y propage horizontalement, d'après une formule connue de Lagrange, avec une *célérité*

$$(1) \quad k = \sqrt{gh},$$

si, g étant l'accélération due à la gravité, h désigne la hauteur d'eau dans le canal à mer basse, et si nous appelons *célérité de propagation* la longueur k qu'acquiert dans l'unité de temps l'intumescence produite; acquisition que l'on ne doit point confondre avec une *vitesse* de transport réel et horizontal de l'eau; car l'intumescence ne s'allonge que parce que les molécules de la surface se soulèvent successivement, et dans des directions presque verticales, en vertu de pressions éprouvées de bas en haut.

» D'autres intumescences viennent ensuite se superposer à celle-ci. L'eau qu'elles introduisent, se mêlant à celle du canal, lui fait acquérir une certaine *vitesse* horizontale que nous supposerons, en abstrayant les frottements, sensiblement la même de la surface au fond. Si nous appelons U cette vitesse acquise quand la profondeur d'eau est devenue y , l'intumescence infiniment petite qui suivra aura, comme l'ont vérifié les expériences de Russel et de M. Bazin, une *célérité* de propagation

$$(2) \quad k = \sqrt{gy} + U;$$

19..

Figura 18. Primera página del artículo de Saint-Venant en el que deduce las ecuaciones que rigen el movimiento de los líquidos en canales que llevan su nombre. En este artículo define el término “celeridad” de la onda.

(1243)

males quelconques, rectangulaires entre elles, et les différences des vitesses de dilatation correspondantes, un rapport constant, justement *double* de celui qui a lieu entre les pressions tangentielles et les vitesses de glissement qui leur correspondent.

» 6. On a donc, ε étant ce rapport :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{p_{xx} - p_{yy}}{2 \left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy} \right)} &= \frac{p_{xx} - p_{zz}}{2 \left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\zeta}{dz} \right)} = \frac{p_{yy} - p_{zz}}{2 \left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\zeta}{dz} \right)} = \frac{p_{yz}}{\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}} = \frac{p_{zx}}{\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}} \\ &= \frac{p_{xy}}{\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}} = \varepsilon; \end{aligned} \right.$$

d'où, en faisant $\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3} - \frac{2\varepsilon}{3} \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \right) = \pi :$

$$(2) \quad p_{xx} = \pi + 2\varepsilon \frac{d\xi}{dz}, \quad p_{yy} = \pi + 2\varepsilon \frac{d\eta}{dy}, \quad p_{zz} = \pi + 2\varepsilon \frac{d\zeta}{dz},$$

$$(3) \quad p_{yz} = \varepsilon \left(\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\zeta}{dy} \right), \quad p_{zx} = \varepsilon \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\zeta}{dz} \right), \quad p_{xy} = \varepsilon \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} \right).$$

Ce sont les formules données par M. Cauchy, pour le mouvement intérieur d'un corps mou (*Exercices de Mathématiques*, 1828, p. 186). Ce sont aussi les formules données par M. Poisson, pour les fluides (*Journal de l'École Polytechnique*, XX^e cahier, p. 149), en représentant par π la quantité indéterminée que l'illustre géomètre appelle $p - \alpha \frac{d\dot{\varphi}t}{dt} - \frac{\delta'}{\gamma t} \frac{d\gamma t}{dt}$.

» Si l'on remplace π par $\varpi - \varepsilon \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \right)$, et si l'on substitue les équations (2) et (3) dans les relations connues entre les pressions et les forces accélératrices, on obtient, en supposant ε le même en tous les points du fluide, les équations différentielles données le 18 mars 1822 par M. Navier (*Mémoires de l'Institut*, t. VI), en 1828 par M. Cauchy (*Exercices de Mathématiques*, p. 187), et le 12 octobre 1829 par M. Poisson (même Mémoire, p. 152).

» La quantité variable ϖ ou π n'est autre chose, dans les liquides, que la *pression normale moyenne* en chaque point.

» 7. La solution n'est sans doute pas encore complète, car ce qui précède n'établit pas que ε soit le même en tous les points; mais il était utile de circonscrire la question, et de prouver que toute analyse dont le point de départ s'accordera avec ce qu'on a admis au n^o 3, conduira nécessairement, et par cela seul, aux formules (2) et (3). »

Figura 19. Página de la nota explicativa de Saint-Venant a su trabajo de 1834 (Saint-Venant, 1843) donde relaciona los esfuerzos normales y tangenciales con las deformaciones del elemento de fluido. ξ, η, ζ corresponden a las velocidades según x, y, z .

Sin lugar a duda, el aporte de Saint-Venant a la hidrodinámica fue trascendental, si bien su apellido no acompaña los nombres de la ecuación del movimiento ni de la modelación de la turbulencia. Los comentarios reproducidos en el párrafo anterior hay que entenderlos en el contexto del conocimiento que se tenía del movimiento de los fluidos hasta los primeros tres cuartos del siglo XIX. Las deducciones, compatibles con el enfoque molecular, conducían a ecuaciones del movimiento que presentaban dos problemas (además de la imposibilidad de encontrar una solución general a las ecuaciones diferenciales, debido a la presencia de términos no-lineales): uno teórico y otro empírico. El teórico corresponde a la condición de borde que debe imponerse: ¿existe o no deslizamiento de las moléculas de fluido en contacto con la pared? El empírico se debe a que los resultados obtenidos a partir de la aplicación de las ecuaciones del movimiento solo concordaban con mediciones hechas en tubos capilares o de diámetro muy pequeños. En canales y tuberías de mayor diámetro, el caudal y la resistencia no coincidían con el resultado teórico. Además, se observaba un patrón del movimiento que no era rectilíneo sino con “trayectorias ondulantes” y presencia de remolinos que, según Saint-Venant, generaban una *fricción interna extraordinaria* (en oposición a la *fricción ordinaria* que se tenía para movimiento rectilíneo del flujo). Habría que esperar a Reynolds para establecer la diferencia entre lo que en el lenguaje actual llamamos flujo laminar y flujo turbulento, así como las ecuaciones que rigen a este último. Pero Saint-Venant ya tenía claro que debía considerar cantidades *promedios* y que el coeficiente de resistencia interna, ε , dependía tanto de propiedades del fluido (por sus fuerzas de atracción molecular) como del flujo y de la geometría del canal. Con el lenguaje actual, diríamos que $\varepsilon = \varepsilon_V + \varepsilon_T$: el coeficiente de fricción interna (como diría Saint-Venant) tiene una componente viscosa y otra turbulenta. Fue Boussinesq quien publicó expresiones para ε en 1877, y sin duda que ellas habían sido discutidas con Saint-Venant. En forma general, según Boussinesq, ε depende de la posición (y, z) en la sección de escurrimiento y está dado por:

$$\varepsilon = \rho g A \frac{\sigma}{\chi} \bar{u}_0 F\left(\frac{\chi y}{\sigma}, \frac{\chi z}{\sigma}\right) \quad (14)$$

donde ρ es la densidad del fluido, g es la aceleración de gravedad, σ es el área de escurrimiento, χ es el perímetro mojado, \bar{u}_0 es el valor medio de la velocidad en la pared, y F una relación funcional que depende de $\chi y/\sigma$ y $\chi z/\sigma$. A es un coeficiente que depende del tamaño de la rugosidad de la pared, muy poco dependiente de \bar{u}_0 y lentamente variable con el radio hidráulico (Boussinesq, 1877, p. 51). Las dimensiones de A son L/T^2 .

De este modo, podemos ver que el aporte de Saint-Venant va mucho más allá de la deducción de la ecuación del movimiento de los fluidos. Combinando su aguda capacidad de análisis e integración de observaciones, principios físicos y teoría fue capaz de anticiparse a lo que sería la modelación de la turbulencia al concebir que la resistencia local al movimiento dependía tanto de factores moleculares como de las propiedades integrales del flujo. Puede considerarse el éxito del maestro a través del trabajo de su protegido, J. Boussinesq, quien exitosamente aplicó las concepciones de Navier al flujo turbulento, considerando las variables promedio y una viscosidad variable.

6.4. George Gabriel Stokes (1814-1903)

Como se ha podido ver, la ecuación del movimiento de los fluidos, parece ser una obra exclusiva de mentes francesas, resultado de la sólida formación matemática entregada en la École Polytechnique, la que buscaba la generación de conocimiento avanzado en física matemática en un contexto de aplicaciones ingenieriles (Darrigol, 2002). El interés de los científicos ingleses de esa época estaba en la astronomía o matemáticas y solo tangencialmente en la hidrodinámica o elasticidad. Las contribuciones de personas como George Airy (1801-1892), George Green (1793-1841) o Phillip Kelland (1808-1879), especialmente en el campo de la teoría de olas, fueron solo subproductos de sus intereses principales. En este ambiente se encuentra Stokes, cuya formación era en matemáticas.

El primer artículo que aparece en *Mathematical and Physical Papers by George Gabriel Stokes, Vol. 1*, publicado en 1880, en el que se recopila la obra de Stokes, tomada de las publicaciones originales, “con notas adicionales por el autor” se denomina “On the steady motion of incompressible fluids” y fue leído el 25 de abril de 1842 y publicado originalmente en el Vol. VII de *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*. El artículo considera flujo irrotacional bidimensional “donde las líneas de corriente son un sistema de elipses similares o hipérbolas con el mismo centro, o un sistema de parábolas iguales que tienen el mismo eje” (Stokes, 1842; p. 446). Al discutir el caso de las hipérbolas, considera la descarga a través de un orificio desde un estanque a otro lleno de fluido, indicando el resultado experimental que el fluido “tiene una tendencia a mantenerse dentro de un canal propio, en lugar de expandirse” (Stokes, 1842; p. 447). De este modo Stokes es el primero en relacionar las ecuaciones que rigen el flujo irrotacional (ecuaciones de Euler) con superficies de discontinuidad. Pero tanto o más interesante es cuando escribe “No he probado que el fluido *debe moverse en este sistema de líneas*⁷. ... pueden existir quizás distintos modos de movimiento permanente; y de esos algunos pueden ser estables, y otros inestables. Puede incluso no haber un modo estable de movimiento posible, en cuyo caso el fluido continuaría en perpetuos remolinos (*perpetually edding*).” Es así como Stokes en 1842 introduce el concepto de estabilidad hidrodinámica, el que ahora es de uso común en mecánica de fluidos e hidráulica.

El 14 de abril de 1845 Stokes presentó ante la Cambridge Philosophical Society el trabajo por el que más se le reconoce en la actualidad: “Sobre las Teorías de la Fricción Interna de los Fluidos, y del Equilibrio y Movimiento de Sólidos Elásticos”, en el que derivó las ecuaciones del movimiento de un fluido newtoniano compresible o incompresible. Curiosamente, no menciona de manera explícita la viscosidad, aunque dice que “la cantidad de fricción interna del agua depende del valor de μ ”. La deducción que hace Stokes no es tan directa como lo hacemos corrientemente en los cursos de Mecánica de Fluidos. Primero, considera el desplazamiento relativo entre dos puntos P y P' del fluido y concluye que el movimiento más general está compuesto por traslación, rotación, “dilatación uniforme” y “movimientos de desplazamiento” (deformación angular). La presión la descompone en dos términos, uno correspondiente a la presión en un estado de equilibrio y el otro asociado al movimiento, que demuestra es independiente de la velocidad angular y que debe depender

⁷ Cursivas agregadas por el autor. Lo que Stokes denomina “sistemas de líneas” en nuestro vocabulario corresponde a líneas de corrientes.

de las “velocidades residuales relativas”, e' , e'' , e''' , donde las primas indican los tres ejes de extensión o direcciones coordenadas, es decir, con nuestra notación, $e' = \partial u / \partial x$, $e'' = \partial v / \partial y$, $e''' = \partial w / \partial z$. La presión actuando en la dirección de cada uno de los ejes está dada por $p + p'$, $p + p''$ y $p + p'''$, siendo p la presión en el estado de equilibrio y las que llevan primas, al movimiento en las direcciones respectivas. Las presiones en las direcciones perpendiculares a los ejes x , y y z deben ser funciones de las velocidades residuales relativas, por lo que deberá tenerse

$$p' = \phi(e', e'', e'''); \quad p'' = \phi(e'', e''', e'); \quad p''' = \phi(e''', e', e'') \quad (16)$$

donde “ $\phi(e', e'', e''')$ ” denota una función de e' , e'' y e''' que es simétrica con respecto a las dos últimas cantidades. El problema ahora es determinar, en lo que pueda parecer la hipótesis más probable, la forma de la función ϕ .” Stokes considera una relación lineal entre p' y e' , obteniendo $p' = C e'$, $p'' = C' e'$, $p''' = C'' e'$. Invocando la simetría antes indicada, resulta $C'' = 0$ y $C' = -C$. Luego, sin mayor explicación, Stokes considera $C = -2\mu$, obteniendo

$$p' = -2\mu e'; \quad p'' = -2\mu e''; \quad p''' = -2\mu e''' \quad (17)$$

Si el fluido además de desplazarse está sometido a una dilatación (fluido compresible), la expresión para p' resulta ser

$$p' = \frac{2}{3}\mu(e'' + e''' - 2e') + \kappa(e' + e'' + e''') \quad (18)$$

Expresiones similares se obtienen para p'' y p''' . El siguiente paso de Stokes consistió en determinar la “presión oblicua, o la resultante de la presión normal y la acción tangencial, sobre cualquier plano”. Finalmente, en términos de la tasa de dilatación cúbica 3δ , los esfuerzos normales y tangenciales que actúan sobre las superficies de un elemento de fluido están dados por:

$$3\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= p - 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \delta \right), & P_2 &= p - 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \delta \right), & P_3 &= p - 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \delta \right) \\ T_1 &= -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), & T_2 &= -\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), & T_3 &= -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Escribiendo los esfuerzos anteriores con la notación usualmente utilizada en la actualidad, se tiene: $P_1 = \tau_{xx}$, $P_2 = \tau_{yy}$, $P_3 = \tau_{zz}$, $T_1 = \tau_{zy} = \tau_{yz}$, $T_2 = \tau_{zx} = \tau_{xz}$, $T_3 = \tau_{xy} = \tau_{yx}$. Para un fluido incompresible $\delta = 0$, y los esfuerzos normales se reducen a la presión termodinámica.

Es de interés el siguiente comentario que Stokes hace respecto a μ : “Vemos también que es necesario *suponer* μ sea positivo, ya que de otro modo la tendencia de las fuerzas sería aumentar el movimiento de las partes del fluido, y el equilibrio del fluido sería inestable” (Stokes, 1845; p. 296). Llama la atención que, según Stokes, deba *suponerse* un valor positivo del coeficiente μ . En la actualidad, nadie dudaría que la viscosidad *debe* ser positiva y que no es un supuesto. Con los supuestos adicionales que μ debe ser constante e independiente de la presión, y que el fluido es homogéneo, Stokes llega a la ecuación del movimiento de los fluidos newtonianos, cuya componente en la dirección x se presenta en la Fig. 20. La

to denote differentiation in which the independent variables are t and three parameters of the particle considered, (such for instance as its initial co-ordinates,) and not t, x, y, z . It is easy also to show that the moving force acting on the element considered arising from the oblique pressures on the faces is ultimately $\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dT_2}{dz}\right) \Delta x \Delta y \Delta z$, acting in the negative direction. Hence we have by D'Alembert's principle

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} - X\right) + \frac{dP_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} = 0, \&c., \dots \dots \dots (10)$$

in which equations we must put for $\frac{Du}{Dt}$ its value $\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz}$, and similarly for $\frac{Dv}{Dt}$ and $\frac{Dw}{Dt}$. In considering the general equations of motion it will be needless to write down more than one, since the other two may be at once derived from it by interchanging the requisite quantities. The equations (10), the ordinary equation of continuity, as it is called,

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho u}{dx} + \frac{d\rho v}{dy} + \frac{d\rho w}{dz} = 0, \dots \dots \dots (11)$$

which expresses the condition that there is no generation or destruction of mass in the interior of a fluid, the equation connecting p and ρ , or in the case of an incompressible fluid the equivalent equation $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, and the equation for the propagation of heat, if we choose to take account of that propagation, are the only equations to be satisfied at every point of the interior of the fluid mass.

As it is quite useless to consider cases of the utmost degree of generality, I shall suppose the fluid to be homogeneous, and of a uniform temperature throughout, except in so far as the temperature may be raised by sudden compression in the case of small vibrations. Hence in equations (10) μ may be supposed to be constant as far as regards the temperature; for, in the case of small vibrations, the terms introduced by supposing it to vary with the temperature would involve the square of the velocity, which is supposed to be neglected. If we suppose μ to be independent of the pressure also, and substitute in (10) the values of P_i &c. given by (8), the former equations become

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} - X\right) + \frac{dp}{dx} - \mu \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3} \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \&c. \dots \dots (12)$$

Let us now consider in what cases it is allowable to suppose μ to be independent of the pressure. It has been concluded by Dubuat, from his experiments on the motion of water in pipes and canals, that the total retardation of the velocity due to friction is not increased by increasing the pressure. The total retardation depends, partly on the friction of the water against the sides of the pipe or canal, and partly on the mutual friction, or tangential action, of the different portions of the water. Now if these two parts of the whole retardation were separately variable with p , it is very unlikely that they should when combined give a result independent of p . The amount of the internal friction of the water depends on the value of μ . I shall therefore suppose that for water, and by analogy for other incompressible fluids, μ is independent of the pressure. On this supposition, we have from equations (11) and (12)

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} - X\right) + \frac{dp}{dx} - \mu \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) = 0, \&c. \dots \dots \dots (13)$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

VOL. VIII. PART III.

Q q

Figura 20. Página del artículo de Stokes de 1845 en el que presenta su deducción de las ecuaciones que rigen el movimiento de los fluidos. La ecuación 12 corresponde a la componente según x para un fluido compresible y la ecuación 13 para un fluido incompresible.

ecuación 12 del artículo de Stokes corresponde al caso del fluido compresible y la ecuación 13 al de uno incompresible. En ellas, X es la componente según x de la fuerza másica por unidad de masa (generalmente la debida al campo gravitacional, g_x) y $Du/Dt = \partial u/\partial t + \vec{V} \cdot \nabla u$.

El próximo problema por resolver es el de las condiciones de borde, y “el método de proceder será diferente según se considere como superficie límite una superficie libre, la superficie de un sólido o la superficie de separación de dos fluidos, y será necesario considerar estos casos por separado ...” (p. 298). Sin entrar en el detalle de las condiciones de borde para los distintos casos, es interesante indicar que Stokes considera que no hay deslizamiento del flujo en contacto con la pared, “La condición que primero se me ocurrió para este caso fue que una película de fluido inmediatamente en contacto con el sólido no tiene un movimiento relativo a la superficie del sólido” (p.299). Sin embargo, al comparar el resultado calculado a partir de la fórmula para el caudal obtenida de sus ecuaciones con los experimentos de Bossut y Dubuat, encontró “que la fórmula no concordaba en absoluto con el experimento”. Esto lo llevó a incluir una velocidad de deslizamiento U , por lo que la distribución de velocidades $w(r)$ que obtiene en una tubería cilíndrica de radio a , es

$$w = \frac{\rho g \sin \alpha}{4\mu} (a^2 - r^2) + U \quad (21)$$

Que Stokes no estaba convencido con la Ec. 21 queda claro al leer su reporte a la British Association for Advancement of the Science de 1846, en el que indica que “Dubuat estableció, como un resultado de sus experimentos, que cuando la velocidad del agua que fluye por una tubería es menor que una cierta cantidad, el agua adyacente a la superficie de la tubería está en reposo”. Stokes también indica que la condición de no-deslizamiento concuerda con los experimentos de Coulomb, el que realizó con un disco metálico que oscilaba lentamente en torno a un eje que pasaba perpendicular por su centro: la resistencia al movimiento era la misma si la superficie del disco estaba limpia, con una película de grasa (para reducir la fricción) o si la superficie tenía arena adherida. Este resultado es compatible con el supuesto que el fluido en contacto con la superficie no tiene una velocidad relativa respecto a ella. (Stokes, 1847; p. 19). La condición de no-deslizamiento quedaría definitivamente establecida con sus experimentos de oscilación de péndulos. En la publicación su 1850, dice “supondré, ..., que la velocidad de una partícula fluida será la misma, tanto en magnitud como en dirección, que la de la partícula sólida con la que está en contacto. La concordancia de los resultados así obtenidos con la observación se muestra muy satisfactoria” (Stokes, 1850; p. 15).

Por último, y solo como dato anecdótico, en el artículo de 1850 Stokes indica que los resultados asociados al efecto de la fricción en la oscilación de un péndulo pueden ser caracterizados con solo una contante, que él denomina *índice de fricción* y denota como μ' . El índice de fricción lo determina para varios fluidos y está definido como $\mu' = \mu/\rho$, es decir, corresponde a lo que ahora conocemos como viscosidad cinemática. Stokes dice que en la solución de las ecuaciones del movimiento μ siempre aparece dividido por ρ , por lo que el uso de μ' es más conveniente. Además, el índice de fricción tiene la ventaja de que sus unidades son “el cuadrado de una línea dividido por un tiempo”, por lo que es más fácil de adaptar a distintos sistemas de unidades. (Stokes, 1850: p. 17)

7. CONCLUSIÓN

De este modo, podemos decir que se cierra la historia de las ecuaciones que rigen el movimiento de los fluidos. Historia larga que arbitrariamente se comenzó en 1628, con la publicación de Benedetto Castelli donde establece la ecuación de continuidad, y que culmina doscientos años más tarde con el trabajo de Navier, rehecho con distintas visiones o énfasis por Cauchy, Poisson, Saint-Venant y Stokes. El gran aporte de este último fue el dilucidar la correcta condición de borde que debe imponerse al integrar las ecuaciones del movimiento de los fluidos. Probablemente esta es la razón por la que dichas ecuaciones llevan su nombre, junto al del primero en deducirlas. Sin embargo, a juicio del autor, la contribución de Saint-Venant no ha sido suficientemente reconocida.

No hay duda de que el aporte de Navier fue enorme, pero es opinión del autor que por accidente llega a la correcta forma de las ecuaciones del movimiento. Sin tener un claro conocimiento de los esfuerzos de corte en los fluidos, el análisis de Navier no refleja completamente la física asociada a la fricción interna de los fluidos. En su trabajo, incorpora una fuerza adicional en la ecuación de Euler, asociada a la interacción entre moléculas, modelada al más básico enfoque de la dinámica de la partícula derivado de los *Principia* de Newton. Sin embargo, esto no resta mérito al trabajo de Navier. Como sucede con el progreso del conocimiento científico, los aportes de muchos otros grandes pensadores (“Geómetras” en el lenguaje de D’Alembert) ayudaron a reinterpretar y formalizar rigurosamente la fricción interna, hasta cerrar el proceso con el trabajo de Stokes.

En este trabajo, solo esporádicamente se ha mencionado el trabajo experimental, en la medida que contradecía el resultado obtenido a partir de la teoría. Aunque se ha mencionado a Bossut, Dubuat y Girard, existen muchos otros que contribuyeron con sus mediciones a validar y, quizás más importante, cuestionar los resultados teóricos. Solo la discusión de la correcta condición de borde generó una controversia que tomó más de medio siglo ser resuelta. Navier y Stokes consideraron tanto la condición de no deslizamiento, así como la existencia de una velocidad relativa del fluido respecto a la pared sólida. Esta discusión surgía al tratar de compatibilizar la teoría con las mediciones. Abordar el aspecto experimental provee material suficiente como para otro artículo, ya sea en cuanto a las mediciones como a la visualización del flujo, lo que anunciaba una nueva vertiente de estudios, relacionado con inestabilidades y turbulencia.

Por último, no hay que olvidar que la complejidad matemática de las ecuaciones diferenciales de Navier-Stokes es tal que ella constituye uno de los siete problemas del milenio aún no resueltos. Estos problemas fueron propuestos por el Clay Mathematics Institute, con un premio de un millón de dólares a quien resuelva uno de ellos. El planteamiento formal del problema se encuentra formulado en un lenguaje matemático en el sitio web del Instituto, <https://www.claymath.org/>, y básicamente consiste en demostrar la existencia de soluciones diferenciables, en tres dimensiones, para cualquier valor físicamente válido de la condición inicial.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el financiamiento otorgado a través del proyecto ANID AFB180004.

REFERENCIAS

Todas las referencias del siglo XIX y anteriores fueron obtenidas de distintas bibliotecas digitales disponibles alrededor del mundo. El autor no habría podido concretar el artículo si no existiera el libre acceso al magnífico material atesorado en estas bibliotecas.

- Bernoulli, D. (1738) *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*. Impresor Johan Heinrich Deckeri, Basilea.
- Boussinesq, J. (1877) “Essai sur la Théorie des Eaux Courantes” Mémoires présentés par divers savants a l’Académie des Sciences, Tome XXIII, No. 1, pp. 1-680.
- Boussinesq, J. (1889) *Leçons Synthétiques de Mécanique Générale servant d’Introduction au Cours de Mécanique Physique*. Gauthier-Villars et Fils, Imprimeurs-Libraires. Paris.
- Boscovich, R.J. (1745) *De Viribus Vivis Dissertatio*. Impresor Komarek, Roma.
- Boscovich, R.J. (1758) *Philosophiæ Naturalis Theoria*. Prostat Viennae Austriae : in officina Libraria Kaliwodiana, Viena.
- Busard, H.L.L. (1981) “François Viète”, en *Dictionary of Scientific Biography*. C.C. Gillispie (Editor in Chief), Vol. 14. Charles Scribner's Sons, New York, pp. 18-25.
- Castelli, B. (1639) *Della Misura dell’Acque Correnti*. Impresor Francesco Cavalli. Roma
- de las Casas, C. (1576) *Vocabulario de las Dos Lengvas Toscana y Castellana*. Impreso en Casa de Alonso, Sevilla.
- D’Alembert, J.L.R. (1744) *Traité de l’équilibre et du mouvement des fluides*. Imprimerie de Jean-Baptiste Coignard. Paris.
- D’Alembert, J.L.R. (1768) “Paradoxe proposé aux Géometres sur la Resistance des Fluides”. *Opuscules Mathématiques*. Tome V, Première Partie, Imprimerie de Chardon. Paris, pp. 132-138.
- Darrigol, O. (2002) “Between Hydrodynamics and Elasticity Theory: The First Five Births of the Navier-Stokes Equation”, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 56, pp. 95-150.
- Girard, M. (1816) “Mémoire sur le mouvement des fluides dans les tubes capillaires, et l’influence de la température sur ce mouvement”. *Mémoires des Sciences Mathématiques et Physiques de l’Institut de France*. Années 1813, 1814, 1815 (Publicado en 1818). Chez Firmin Didot. Paris. pp. 249-380.
- Granger, R.A. (1995) *Fluid Mechanics*. Dover Publications, Inc. New York
- Hager, W.H., K. Hutter, O. Castro-Orgaz (2021) “Correspondence between de Saint-Venant and Boussinesq 5: Viscosity and hydraulic resistance”, *Comptes Rendus. Mécanique*, Vol. 349, No. 1, pp. 145-166.
- Laplace, P.S. (1796) *Exposition du Système du Monde*. Dos tomos. Imprimerie du Cercle-Social. Paris.
- Laplace, P.S. (1798) *Exposition du Système du Monde*. Seconde Édition. Imprimerie de Crapelet. Paris.
- Laplace, P.S. (1805) “Sur l’Action Capillaire”, en *Supplément au Dixième Livre du Traité de Mécanique Céleste* del *Traite de Mécanique Céleste*, Tome Quatrième. Chez Courcier, Paris. pp. 1-50.

- Laplace, P.S. (1808) *Exposition du Système du Monde*. Troisième Édition. Chez Courcier. Paris.
- Lucrecio (1892) *Naturaleza de las Cosas*. Versión en Prosa traducida por Manuel Rodríguez-Navas. Agustín Avrial. Imprenta de la Compañía de Impresores y Libreros. Madrid.
- MacTutor (2022), “Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant”, *Biography - MacTutor History of Mathematics*, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Saint-Venant/> Visitado el 12 de abril de 2022.
- Mahoney, M.S. (1981) “DESCARTES: Mathematics and Physics”, en *Dictionary of Scientific Biography*. C.C. Gillispie (Editor in Chief), Vol. 10. Charles Scribner's Sons, New York, pp. 55-61.
- Massey, B. (2006) *Mechanics of Fluids*. Eight Edition. Taylor & Francis. New York.
- Molina, G.I. (1776) *Compendio delle Storia Geografica Naturale e Civile del Regno de Chile*. Stamperia di S. Tommaso de Aquino, Bologna.
- Molina, G.I. (1782) *Saggio sulla Storia Naturale del Chili*. Stamperia di S. Tommaso de Aquino, Bologna.
- Molina, G.I. (1788) *Compendio de la Historia Geográfica, Natural y Civil del Reyno de Chile*. Impresor Antonio de Sancha, Madrid.
- Munson, B.R., D.F. Young, T.H. Okiishi, W.W. Huebsch (2009) *Fundamentals of Fluid Mechanics*. Sixth Edition. John Wiley & Sons, Inc. Jefferson City.
- McKeon, R.M. (1981) “Navier, Claude-Louis-Marie-Henri”, en *Dictionary of Scientific Biography*. C.C. Gillispie (Editor in Chief), Vol. 10. Charles Scribner's Sons, New York, pp. 2-5.
- Navier, C.L. (1821) “Sur les Lois des mouvemens des fluides, en ayant egard à l’adhesion des molecules”, *Annales de Chimie et de Physique*, Tome Dix-Neuvième, pp. 244-260. Errata en p. 448.
- Navier, C.L. (1822) “Sur les Lois du Mouvement des Fluides”, *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, Tome VI, pp. 389-416. Leído en la Académie Royale des Sciences el 18 de marzo de 1822.
- Newton, I. (1687) *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. S. Pepys, Impresor. Prensas de la Royal Society. Londres.
- Newton, I. (1974) *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World*. Translated into English by Andrew Motte in 1729. The translations revised, and supplied with an historical and explanatory appendix, by Florian Cajori. Volume One: The Motion of Bodies. Eighth Printing. University of California Press. Berkeley, California.
- Poisson, S.D. (1829) “Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques”, *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*. Tome VIII, pp. 357-570. (Leído en reunión de l’Académie de Paris el 14 de abril de 1828).
- Poisson, S.D. (1831) “Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides”, *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier 20 pp. 1-174. (Leído en reunión de l’Académie des Sciences de Paris el 12 de octubre de 1829).

- Rosales, D. (1673, 1877) *Historia General de el Reyno de Chile*. Publicada por Benjamín Vicuña Mackenna en 1877. Imprenta del Mercurio. Valparaíso.
- Rouse, H., S. Ince (1963) *History of Hydraulics*. Dover Publications, Inc. New York.
- Saint-Venant, A. (1834) *L'Institut, Journal Général des Sociétés et Travaux Scientifiques de la France et de l'Étranger*, No. 49, 19 avril 1843.
- Saint-Venant, A. (1834) "Note à joindre au Mémoire sur la dynamique des fluides", publicado en 1843 en *Compte Rendu des Séances de l'Académie des Sciences*, Tome XVII, No. 22, pp. 1240-1244.
- Saint-Venant, A. (1838) "Mémoire sur le Calcul des effets des machines à vapeur; contenant des équations générales de l'écoulement permanent ou périodique des fluides, en tenant compte de leurs dilatations et de leurs changements de température et sans supposer qu'ils se meuvent par tranches parallèles, ni par filets indépendants", *Compte Rendu des Séances de l'Académie des Sciences*, Tome VI, No. 1, pp. 45-47.
- Saint-Venant, A. (1846) "Note sur la détermination expérimentale des forces retardatrices du mouvement des liquides", *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*. Tome XXII, pp. 306-309.
- Saint-Venant, A. (1851) *Formules et tables nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes*. Imprimé par E. Thunot et Cie. Paris. También se encuentra en los *Annales des Mines*, Quatrième Série, Tome XX, pp. 183-357.
- Saint-Venant, A. (1871) "Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit", *Compte Rendu des Séances de l'Académie des Sciences*, pp. 147-154 (deducción de las ecuaciones) y pp. 237-249 (aplicación).
- Shames, I.H. (2001) *Mecánica de Fluidos*. Tercera Edición, Mc Graw Hill, Santafé de Bogotá.
- Spencer, J.B., S.G. Brush and M.J. Osler (2022) "Scientific Revolution". *Encyclopedia Britannica*, <https://www.britannica.com/science/Scientific-Revolution>. Accessed 18 September 2022.
- Stokes, G.G. (1842) "On the Steady Motion of Incompressible Fluids", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. VII. pp. 439-453
- Stokes, G.G. (1845) "On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. VIII. pp. 287-317.
- Stokes, G.G. (1847) "Report on Recent Researches in Hydrodynamics", Report of the Sixteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, Held at Southampton in September 1846. Richard and John E. Taylor, Printers. London. pp. 1-20.
- Stokes, G.G. (1850) "On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. IX. Part II, pp. 8-106.
- Stokes, G.G. (1880) *Mathematical and Physical Papers by George Gabriel Stokes, Vol. 1*. The University Press, Cambridge.
- Streeter, V.L., E.B. Wylie, K.W. Bedford (1999) *Mecánica de Fluidos*. Novena Edición, Mc Graw Hill, Santafé de Bogotá.
- White, F.M. (2004) *Mecánica de Fluidos*. Quinta Edición, Mc Graw Hill, Madrid.

Whyte, L.L. (1961) *Essay on Atomism: From Democritus to 1960*. Wesleyan University Press: Middletown, Connecticut.

Wiedemann, G. (1856) “Ueber die Bewegung der Flüssigkeiten im Kreise der geschlossenen galvanischen Säule und ihre Beziehungen zur Elektrolyse”. *Annalen der Physik und Chemie*. Band XCIX, No. 10, pp. 177-233.

ACERCA DEL AUTOR

Aldo Tamburrino es Ingeniero Civil mención Hidráulica de la Universidad de Chile, M.Sc. y Ph.D. in Civil Engineering por la Universidad de Minnesota, EEUU. Es Profesor Asociado del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Chile, donde enseña cursos de pre y postgrado en dicha universidad. Actualmente sus áreas de interés se centran fundamentalmente en hidráulica fundamental, flujos detríticos, granulares y de fluidos no-newtonianos.

UN PROBLEMA INVERSO DE MECÁNICA DE FLUIDOS APLICADO EN LA DETECCIÓN DE ANOMALÍAS EN VÁLVULAS CARDÍACAS

JORGE AGUAYO¹, CRISTÓBAL BERTOGLIO², AXEL OSSES³

¹Departamento de Ingeniería Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas,
Universidad de Chile.

jaguayo@dim.uchile.cl

²Bernoulli Institute, Universidad de Groningen, Países Bajos.

c.a.bertoglio@rug.nl

³Centro de Modelamiento Matemático y Departamento de Ingeniería Matemática, Facultad
de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.

axosses@dim.uchile.cl

RESUMEN

Presentamos un problema de identificación de parámetros para un parámetro escalar de permeabilidad y la máxima velocidad en la entrada siguiendo un perfil de entrada de referencia. Se considera una versión modificada de las ecuaciones de Navier-Stokes añadiendo un término de permeabilidad a la ecuación de conservación de momento siguiendo la ley de Brinkman, de tal forma que el soporte de dicho término representa obstáculos y deformaciones de dominio. A partir de una velocidad de referencia, que podría ser medida con ruido, baja resolución o en solo una región del dominio, se define un funcional de costo diferenciable con respecto a los parámetros a estimar. Finalmente, se presentan ejemplos numéricos con datos sintéticos basado en la detección de válvulas cardíacas a partir de mediciones globales o locales de datos similares a MRI.

Palabras claves: Problemas inversos, ley de Brinkman, identificación de parámetros, válvulas cardíacas, biomedicina.

1. INTRODUCCIÓN

El flujo de sangre a través del corazón es regulado por cuatro estructuras membranosas, conocidas como válvulas cardíacas, las cuales se abren y cierran debido a diferencias de presión de la sangre. El 20% de la población mundial padece afecciones a las válvulas cardíacas (véase Iung y Vahanian, 2011), siendo la estenosis de las válvulas de la aorta las más prevalentes en países desarrollados como muestra la Figura 1.

Obtener una imagen 3D de la forma de las válvulas es un problema desafiante, especialmente cuando se busca la forma que adquieren cuando están completamente abiertas. Las válvulas de la aorta son estructuras muy delgadas (0.5 mm de espesor) y, por lo tanto, su forma se puede visualizar hoy en día utilizando solo dos modalidades: tomografía computarizada (CT) y ecocardiografía transesofágica (TEE). Dado que la CT se basa en rayos X, solo se utiliza

en pacientes sometidos a reemplazo valvular con el fin de obtener las dimensiones de la raíz aórtica para configurar la prótesis. Las imágenes CT generalmente se obtienen cuando la válvula está cerrada. La obtención de la imagen en la posición de la válvula abierta requiere una dosis de radiación aproximadamente 5 veces mayor, ya que se debe obtener una imagen del ciclo cardíaco completo, lo cual equivale a la dosis de radiación total anual recomendada (véase Mayo y Leipsic, 2009). La TEE es una técnica más nueva, pero altamente invasiva: se inserta un catéter a través del esófago del paciente, lo que implica un procedimiento engorroso. La TEE se aplica la mayor parte del tiempo para monitorear cirugías de reemplazo valvular (consulte Fattouch et al., 2018) y, por lo tanto, rara vez se aplica en una fase de diagnóstico.

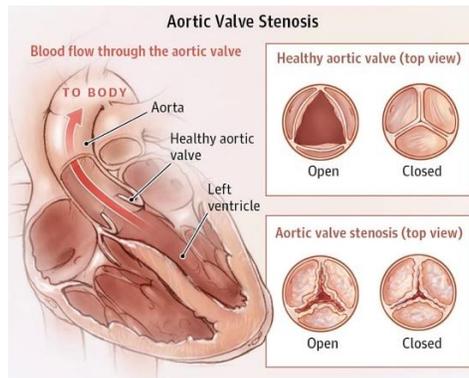


Figura 1. Esquema de una estenosis de válvula aórtica.

La imagen de resonancia magnética (MRI) permite capturar imágenes de estructuras anatómicas de forma no invasiva y sin uso de radiación. Por una parte, la geometría de las válvulas cardíacas no es visible con MRI, dado que su espesor es más pequeño que la dimensión de los vóxeles. Por otra parte, una simple inspección de los datos obtenidos a través de la inspección visual de los conjuntos de datos de 4D Flow MRI (4D Flow, consulte Dyverfeldt et al., 2015) muestra que la forma de la válvula podría ser recuperada a partir del patrón de flujo en los alrededores de la válvula. Este hecho motiva a formular, analizar y evaluar numéricamente el problema inverso de inferir obstáculos rígidos y deformaciones geométricas de dominio a partir de mediciones de velocidad interior, con el objetivo final de recuperar la forma de las válvulas cardíacas en la posición de apertura a partir de imágenes de velocidad.

La novedad de este trabajo es la identificación de obstáculos de flujo por un método inverso que recupere un parámetro de permeabilidad siguiendo la ley de Brinkman (véase Brinkman, 1949 y Auriault, 2008). Para ello, se propone la incorporación de una función escalar no negativa que tenga un gran valor en zona del dominio que representen un obstáculo en el fluido viscoso y que tenga un valor igual o muy cercano a 0 en zonas donde el fluido se mueva libremente. Este método reduce la identificación de obstáculos a un problema potencial inverso más simple. Esta idea está inspirada en Caiazzo et al. (2011), Astorino et al. (2011) y Fedele et al. (2017), quienes modelan válvulas cardíacas usando una superficie sumergida resistiva (RIS) dada por una distribución de Dirac. El problema de usar RIS para la identificación de válvulas sería la necesidad de modificar la discretización del dominio en

cada iteración del procedimiento de identificación. En contraste, el término de permeabilidad que proponemos aquí nos permite trabajar en un dominio fijo para resolver el problema de identificación de la forma de la válvula. Este método de resistencia distribuida también puede ser útil para estimar la porosidad en flujos de medios porosos.

2. MODELAMIENTO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA

Las ecuaciones de Navier-Stokes son ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) no lineales que describen expresiones para la conservación del momento y masa para fluidos viscosos newtonianos en función de la velocidad \mathbf{u} y la presión del fluido p en un volumen de control o dominio Ω , conociendo la viscosidad y la densidad del fluido, condensadas en la viscosidad dinámica ν .

En el instante en que las válvulas están completamente abiertas, el problema puede ser modelado en estado estacionario como

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega_F \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 && \text{en } \Omega_F \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_W \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{sobre } \Gamma_I \\ -\nu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}} + p\mathbf{n} + \frac{1}{2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})_-\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_O \end{aligned} \tag{1}$$

donde el dominio Ω_F representa la cavidad donde se encuentra la válvula y la frontera de Ω_F se denota por $\partial\Omega_F$ y está descompuesta en tres partes disjuntas Γ_W , Γ_I y Γ_O . Estas partes representan las condiciones de frontera de no deslizamiento, perfil de entrada y de salida, respectivamente. El vector \mathbf{n} es el vector normal exterior y $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})_-$ representa la parte negativa de $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$. La última condición de frontera es conocida como *directional do-nothing condition* (véase Braack y Mucha, 2014) y ha sido explorada en el último tiempo debido a que garantiza existencia y unicidad de solución tanto a nivel analítico como numérico, modelando también los fenómenos de reflujo que pueden surgir en el perfil de salida.

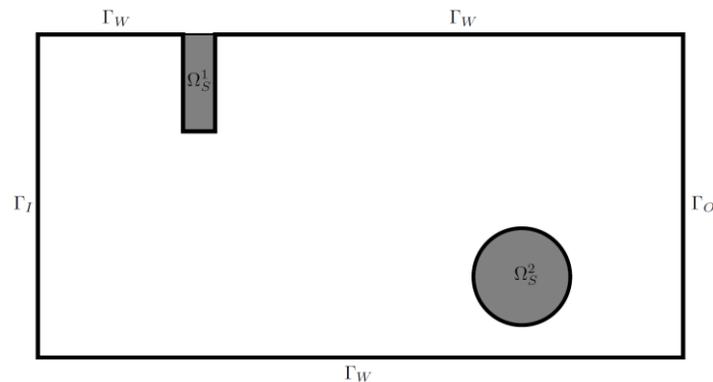


Figura 2. Esquema del dominio Ω , compuesto por los dominios Ω_F (en blanco) y Ω_S (en gris).

Sin embargo, el dominio Ω_F es desconocido por completo, ya que se desconoce la geometría de las válvulas. Para ello, se define un dominio virtual Ω dado por la unión de Ω_F con las válvulas y otros obstáculos Ω_S , tal como muestra la Figura 2, y se define la permeabilidad

del medio dada por una función escalar no negativa γ . El dominio Ω puede ser obtenido mediante segmentación a partir de CT o TEE, lo cual ayuda a simplificar el problema.

La función γ que modela la válvula es igual a 0 en Ω_F e igual a una constante positiva R en Ω_S , con R suficientemente grande. Luego, el problema se reescribe como

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla p + \gamma\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 && \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_W \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} && \text{sobre } \Gamma_I \\ -\nu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}} + p\mathbf{n} + \frac{1}{2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})_-\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_O \end{aligned} \quad (2)$$

donde la solución de (2) se aproxima asintóticamente a la solución de (1) a medida que R es más grande (véase Aguayo y Carrillo, 2022). Por ende, el problema es encontrar dicho parámetro γ a partir de mediciones locales o globales de la velocidad de la sangre en el dominio.

El problema inverso de recuperar el parámetro de permeabilidad γ a partir de mediciones locales de la velocidad ha tenido poco estudio. Los resultados de estabilidad asociados a este problema requieren de mediciones de la presión del fluido (algo que es muy difícil en cualquier aplicación realista sin conocer el dominio) o de la vorticidad del fluido, dada por $\operatorname{rot}\mathbf{u}$. Esta última alternativa es más cercana a cualquier aplicación numérica, puesto que es posible aproximar $\operatorname{rot}\mathbf{u}$ usando métodos numéricos afines al problema, y ha sido estudiada recientemente por Aguayo y Osses (2022).

Además, tampoco es posible conocer o medir completamente el perfil de velocidades en la entrada debido a la naturaleza del problema. Por lo tanto, \mathbf{g} es una segunda incógnita de nuestro problema inverso.

3. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS

Si \mathbf{u}_R denota a la velocidad del fluido que se está midiendo y el conjunto ω denota la región de medición de la velocidad, donde $\omega \subseteq \Omega$, se define el siguiente problema de minimización

$$\begin{aligned} \text{minimizar } J(\gamma, \beta) &= \frac{1}{2}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_R\|_{0,\omega}^2 + \frac{\alpha}{2}\|\gamma\|_{1,\Omega}^2 \\ \text{sujeto a } & \begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla p + \gamma\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 && \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_W \\ \mathbf{u} &= \beta\mathbf{u}_I && \text{sobre } \Gamma_I \\ -\nu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}} + p\mathbf{n} + \frac{1}{2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})_-\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_O \\ 0 &\leq \gamma \leq M_1 \\ 0 &\leq \beta \leq M_2 \end{aligned} \end{aligned} \quad (3)$$

donde α , M_1 y M_2 son constantes positivas, \mathbf{g} es un perfil de velocidad de entrada

preestablecido, $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_R\|_{0,\omega}^2 = \int_{\omega} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_R|^2 dx$ y $\|\gamma\|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} (|\gamma|^2 + |\nabla\gamma|^2) dx$.

El funcional de costo J definido en (3) depende de los parámetros γ y β , ya que la velocidad del fluido depende de ambos. En este caso, el término $\frac{\alpha}{2} \|\gamma\|_{1,\Omega}^2$ corresponde a una regularización de Tikhonov que ayuda a que el problema se resuelva más fácilmente desde una perspectiva numérica. A medida que la constante α es más pequeña, los parámetros se ajustarán mejor a la velocidad \mathbf{u}_R . Sin embargo, si esta medición tiene una cantidad considerable de ruido o si su resolución es baja, es necesario usar un parámetro α más grande para evitar un sobreajuste a la velocidad observada. Además, el hecho de no medir la vorticidad hace imperioso que se agregue un término regularizante.

El primer parámetro a determinar es la permeabilidad γ , la cual se modela en este problema como una función no negativa y suave (diferenciable en un sentido débil), con una cota superior M_1 . Esta cota superior representa el valor esperado para que γ se correlacione con un obstáculo o deformación de dominio.

El segundo parámetro es la constante β , la cual representa la velocidad máxima del fluido en la entrada. Para ello, se propone un perfil de entrada \mathbf{u}_I que sea compatible con las ecuaciones de Navier-Stokes, como la ley de Poiseuille, que sirva como referencia. Este parámetro debe ser menor o igual a la constante M_2 , la cual es necesaria debido a la naturaleza de las mediciones. El 4D Flow MRI tiene un parámetro conocido como VENC (velocity encoding) que representa la máxima velocidad de fluido que será codificada por la imagen. Si bien dicha velocidad puede ser muy superior al valor óptimo, la existencia de esta cota superior permite que el problema matemático sea más fácil de resolver.

El problema de identificación de parámetros definido en (3) posee solución, lo cual se puede demostrar de forma similar al Teorema 6 de Aguayo et al. (2021), pero no necesariamente la solución es única. Además, es posible probar que la velocidad \mathbf{u} y la presión p son dos veces diferenciables con respecto a los parámetros. Luego, el funcional J es también dos veces diferenciable con respecto a los parámetros, debido a que J es cuadrático. Por lo tanto, es posible plantear condiciones de optimalidad de primer y segundo orden, como también implementar algoritmos de optimización de primer basados en métodos de descenso o también algoritmos de segundo orden basados en cálculos del hessiano.

Calcular hessianos en este tipo de problemas es complejo, incluso a nivel computacional. Por lo tanto, es común usar métodos que lo aproximen como el algoritmo BFGS (Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno) y el uso de estados adjuntos para simplificar el cálculo de las primeras derivadas.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan algunas pruebas numéricas para el problema de minimización (3) simulando una válvula cardíaca en un dominio 2D y en un dominio 3D. En el caso 2D, se presenta una geometría realista de una válvula bicúspide, la cual se extiende para generar un dominio virtual, mientras que en el caso 3D se presenta una geometría cilíndrica con una

válvula tricúspide simulada con parámetros biológicos realistas. En ambos casos, se presentan resultados con información parcial o de baja resolución con el fin de resolver numéricamente el siguiente problema

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar } J(\gamma, \beta) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{OBS}}\|_{0,\omega}^2 + \frac{\alpha_0}{2} \|\gamma\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\alpha_1}{2} |\gamma|_{1,\Omega}^2 \\
 \text{sujeto a} \quad & -\nu \Delta \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} + \nabla p + \gamma \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \\
 & \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \\
 & \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_W \\
 & \mathbf{u} = \beta \mathbf{u}_I \quad \text{sobre } \Gamma_I \\
 & -\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p \mathbf{n} + \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_- \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_O \\
 & 0 \leq \gamma \leq M_1 \\
 & 0 \leq \beta \leq M_2
 \end{aligned} \tag{4}$$

donde $\|\gamma\|_{0,\Omega}^2 = \int_{\Omega} |\gamma|^2 dx$ y $|\gamma|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} |\nabla \gamma|^2 dx$.

Las ecuaciones de Navier-Stokes fueron discretizadas mediante el método de Elementos Finitos en mallas triangulares para dominios 2D y en mallas tetraédricas para dominios 3D usando combinaciones estables de elementos para el par de velocidad y presión (\mathbf{u}, p) . El parámetro de permeabilidad fue discretizado usando elementos de Lagrange de grado 1, denotado como \mathbb{P}_1 . Finalmente, el solver numérico fue implementado en FEniCS con la biblioteca dolfin-adjoint, la cual permite resolver problemas de minimización como el definido en (3). Cada vez que sea necesario, el solver de minimización es inicializado con soluciones nulas para γ y β .

4.1 Solución de referencia en 2D

Se definió un dominio que representara una cavidad cardíaca que rodea la válvula aórtica. El flujo de entrada obedece un perfil parabólico $\mathbf{u}_D = U \mathbf{u}_I$, donde \mathbf{u}_I está dado por

$$\mathbf{u}_I = -x(d - x) \mathbf{n} \tag{5}$$

y $\mathbf{x} = (x, y)$ son las coordenadas del sistema cartesiano en 2D, \mathbf{n} es el vector normal exterior, d es el diámetro de la entrada y U es la velocidad máxima en la entrada. Luego, el dominio virtual Ω está dado por el dominio real Ω_F sin sus respectivas válvulas.

Los parámetros usados corresponden a la viscosidad cinemática de la sangre humana, dada por $\nu = 0.035 \text{ cm}^2/\text{s}$, el diámetro de la entrada $d = 2 \text{ cm}$ y la velocidad máxima en la entrada dada por $U = 30 \text{ cm/s}$, resultando un número de Reynolds en la entrada igual a

$$\text{Re} = \frac{Ud}{\nu} = 1714 \tag{6}$$

Para garantizar la estabilidad de la discretización de elementos finitos, se utilizaron elementos de Taylor-Hood, dados por elementos de Lagrange de grado 2, también conocido como \mathbb{P}_2 , para la velocidad \mathbf{u} y de grado 1 para la presión p .

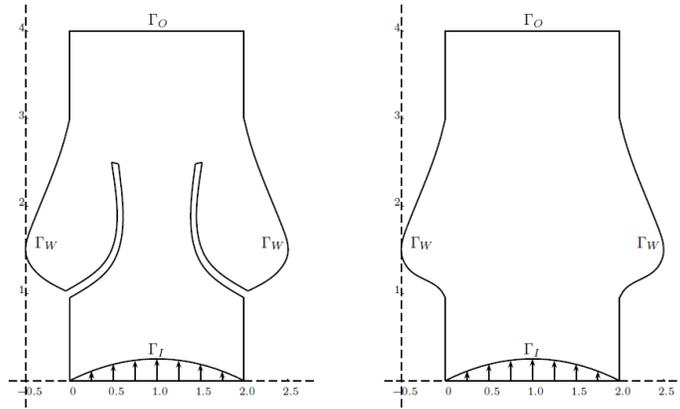


Figura 3. Dominio real Ω_F (izquierda) y dominio virtual Ω (derecha) para el caso 2D.

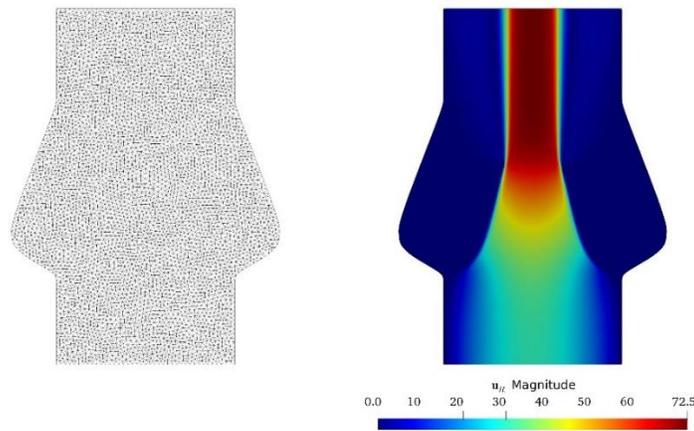


Figura 4. Malla del dominio Ω (izquierda) y de la solución de referencia \mathbf{u}_R interpolada en Ω .

4.2 Solución del problema de identificación de parámetros en 2D

Para las pruebas 2D se consideran los parámetros $M_1 = 50$, $M_2 = 10^4$, $\alpha_0 = 10^{-5}$ y $\alpha_1 = 10^{-8}$. En primer lugar, se establece una prueba de referencia donde la región de medición será el dominio virtual completo, por lo que se considera $\omega = \Omega$ y $\mathbf{u}_{\text{OBS}} = \mathbf{u}_R$.

El valor óptimo $\beta^* = 31,854$ es cercano al valor de referencia $\beta = U = 30$, mostrando empíricamente que el problema antes definido permite obtener una buena aproximación de la máxima velocidad en la entrada. Asimismo, los resultados numéricos presentados en la Figura 5 presentan una polilínea rosada que sigue los puntos donde el estado óptimo γ^* alcanza sus máximos valores a cada lado del eje de simetría, los cuales aproximan de buena forma la frontera interior de las válvulas. El óptimo γ^* asume valores cercanos a 0 entre las válvulas, arriba y debajo de ellas, de acuerdo con lo esperado.

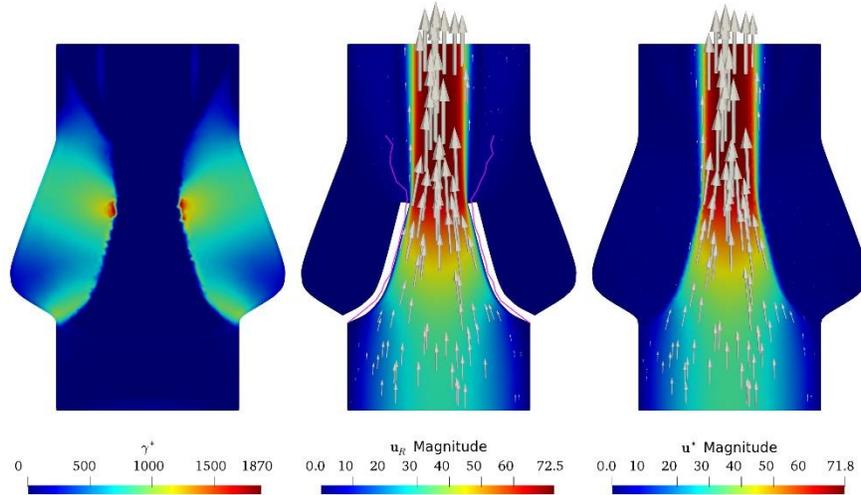


Figura 5. γ^* óptimo, solución de referencia \mathbf{u}_R con válvula reconstruida y velocidad óptima \mathbf{u}^* (de izquierda a derecha). Prueba de referencia, 366 iteraciones, $\beta^* = 31,854$.

De forma similar es posible obtener resultados similares reduciendo la medición de velocidad a la región rectangular dibujada en negro en la Figura 6, el cual se ha denominado como prueba de subdominio.

En particular, el solver de minimización requiere menos iteraciones para obtener similares resultados para los estados γ y β . El óptimo γ^* asume valores levemente superiores a 0 bajo las válvulas, lo cual corresponde a la falta de información generada al medir en un subdominio, pero de todas formas es posible generar una resistencia capaz de reproducir una estimación de la velocidad óptima. Esto es compensado con un aumento del valor del óptimo β^* .

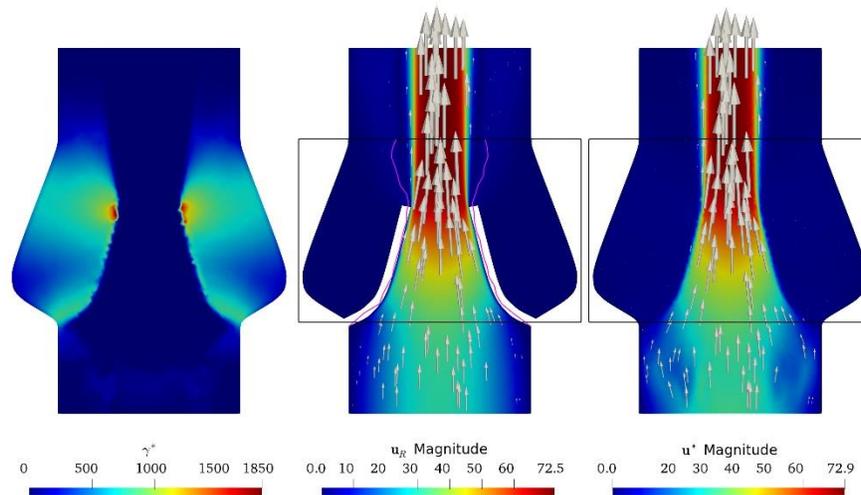


Figura 6. γ^* óptimo, solución de referencia \mathbf{u}_R con válvula reconstruida y velocidad óptima \mathbf{u}^* (de izquierda a derecha). Prueba de subdominio, 320 iteraciones, $\beta^* = 32,2953$.

Finalmente, se presenta la prueba de MRI, que consiste en una simulación sintética de 4D Flow MRI. Este tipo de imágenes representa el flujo medio de sangre en una unidad de volumen, denominada vóxel, el cual puede ser reinterpretado como la velocidad media del

fluido en él. Asumiendo una representación constante de dicha velocidad en cada vóxel, es posible interpretar el 4D Flow MRI como una proyección al espacio de elementos finitos de las funciones constantes por elementos, definido en una malla estructurada de hexaedros, el cual se denota como \mathbb{Q}_0 . Entonces, a partir de nuestra solución de referencia \mathbf{u}_R se genera una simulación de MRI mediante una proyección a \mathbb{Q}_0 en una malla estructurada con vóxeles cuadrados de lado 1 mm, la cual es nuevamente proyectada al espacio \mathbb{P}_2 con el fin de definir la observación \mathbf{u}_{OBS} . Esto se puede comparar de mejor forma con los estados numéricos.

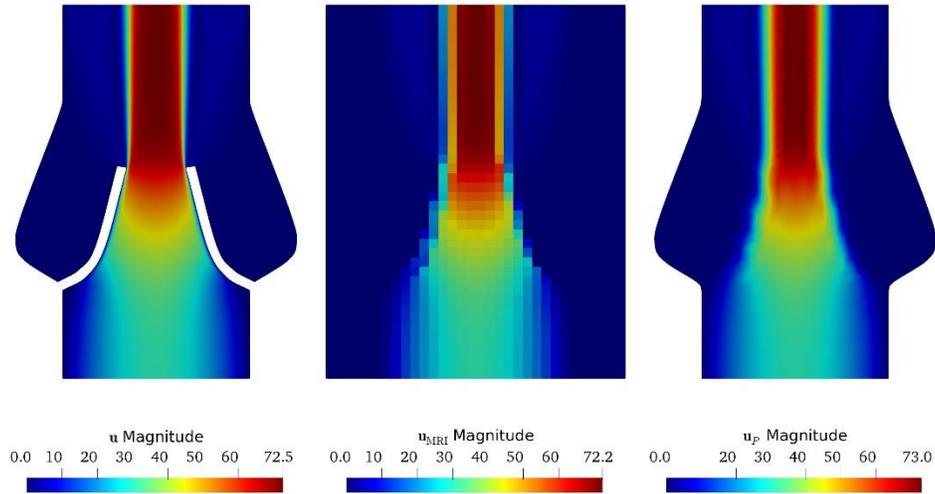


Figura 7. Solución de referencia \mathbf{u}_R (izquierda), MRI sintético \mathbf{u}_{MRI} (centro) y proyección de la velocidad \mathbf{u}_R (derecha).

Usando los mismos parámetros definidos anteriormente, se resolvió el problema (4) obteniendo los resultados que muestra la Figura 8. En este caso, la válvula reconstruida está localizada más alejada del centro de simetría que la obtenida en los experimentos anteriores debido al muestreo del MRI, aunque el valor óptimo β^* es similar a los anteriores.

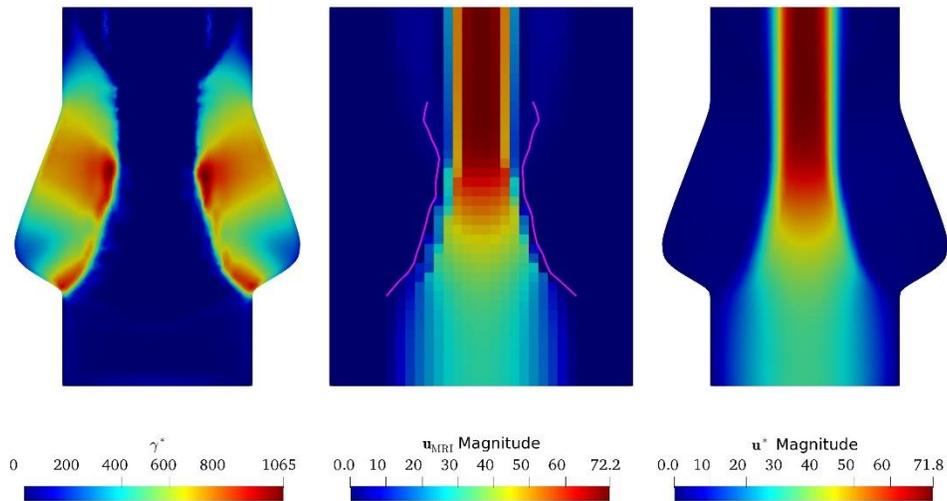


Figura 8. γ^* óptimo, MRI sintético \mathbf{u}_{MRI} con válvula reconstruida y velocidad óptima \mathbf{u}^* (de izquierda a derecha). Prueba de MRI, 373 iteraciones, $\beta^* = 31,6530$.

La intensidad del ruido blanco en las mediciones de MRI es proporcional al VENC, el cual es configurado de tal forma que permita capturar la máxima velocidad en la región de medición. Entonces, el ruido esperado es proporcional a la máxima velocidad. En aplicaciones clínicas, un MRI de alta calidad presenta ruido equivalente al 10% de la velocidad máxima. Ruido gaussiano fue adicionado a cada componente de la velocidad de nuestro MRI sintético con desviación estándar de 5%, 10% y 20% del máximo valor absoluto de cada componente de la velocidad de referencia \mathbf{u}_R .

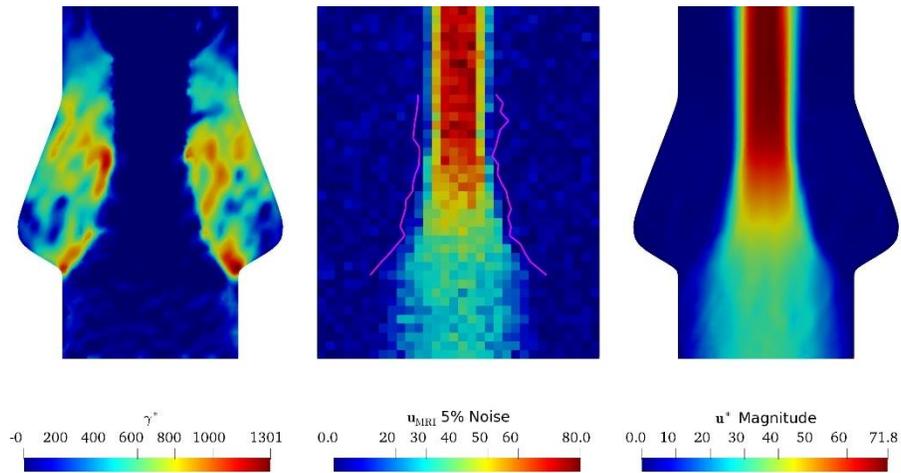


Figura 9. γ^* óptimo, MRI sintético \mathbf{u}_{MRI} con válvula reconstruida y velocidad óptima \mathbf{u}^* (de izquierda a derecha). Prueba de MRI con 5% de ruido, 298 iteraciones, $\beta^* = 31,4286$.

La Figura 9 muestra los resultados del experimento con 5% de ruido gaussiano, obteniendo similares resultados a los obtenidos en los experimentos anteriores sin ruido considerando la polilínea que reconstruye la válvula. Sin embargo, dicha aproximación empeora a medida que el ruido aumenta debido a la tendencia al sobreajuste de los datos.

La Tabla 1 muestra el error cuadrático medio (MSE) entre la válvula reconstruida dada por las polilíneas que reconstruyen las válvulas para la MRI sintético con diferentes niveles de ruido y la polilínea obtenida en la prueba de referencia. Para cuantificar este error, solo son considerados los puntos de la polilínea que están a distancia de 0,5 mm o menor de la válvula real. Hay diferencias pequeñas en el caso sin ruido y con 5% de ruido, pero este error aumenta a medida que el nivel de ruido crece hasta 20%.

Tabla 1. Error cuadrático medio en la predicción de válvulas.

Nivel de ruido	MSE
0%	$9,9098 \cdot 10^{-3}$
5%	$1,1720 \cdot 10^{-3}$
10%	$2,3320 \cdot 10^{-2}$
20%	$4,1661 \cdot 10^{-2}$

4.3 Solución de referencia en 3D

Buscando simplificar las pruebas numéricas, se escogió un dominio cilíndrico de radio 1,305 cm y largo 4 cm con un mallado conforme de tetraedros. Al igual que el caso 2D, el flujo de entrada obedece un perfil parabólico $\mathbf{u}_D = U\mathbf{u}_I$, donde

$$\mathbf{u}_I = -\frac{U}{R^2}(R^2 - x^2 - y^2)\mathbf{n} \quad (5)$$

y $\mathbf{x} = (x, y, z)$ son las coordenadas del sistema cartesiano en 2D, \mathbf{n} es el vector normal exterior, R es el radio de la entrada y U es la velocidad máxima en la entrada.

Las válvulas fueron modeladas a partir de un parámetro de permeabilidad usando una función γ_R que asume un valor $M = 10^{10}$ en la válvula y el valor 0 fuera de ella y modelada como una función en el espacio \mathbb{P}_1 , donde los valores nodales son iguales a M o 0. Para ello, se usó un modelo paramétrico de una válvula tricúspide inspirado en Haj-Ali et al. (2012). Los otros parámetros biológicos para la sangre humana permanecen constantes. De esta forma, el número de Reynolds está dado por

$$\text{Re} = \frac{Ud}{\nu} = 2237 \quad (7)$$

A diferencia del caso 2D, se optó por elegir otra familia de elementos finitos que garantizara estabilidad con una menor cantidad de grados de libertad. Para ello, se utilizó el MINI elemento, consistente por el espacio $\mathbb{P}_{1,\text{bub}}$ para la velocidad \mathbf{u} y \mathbb{P}_1 para la presión p . El elemento $\mathbb{P}_{1,\text{bub}}$ está dado por la suma del espacio \mathbb{P}_1 con el espacio de las funciones burbujas (véase en), reduciendo los grados de libertad en comparación al uso del espacio \mathbb{P}_2 usado en el elemento de Taylor-Hood y manteniendo el orden de error del método de elementos finitos.

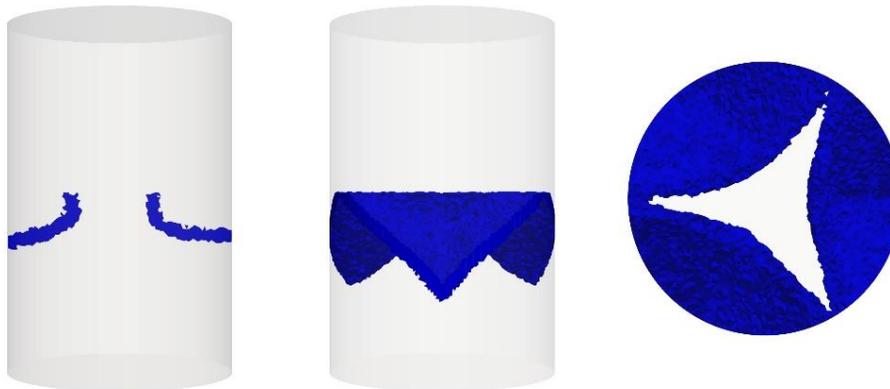


Figura 10. Gráficos de las válvulas. Cortes en el plano $x = 0$ (izquierda), vista frontal (centro) y vista exterior (derecha)

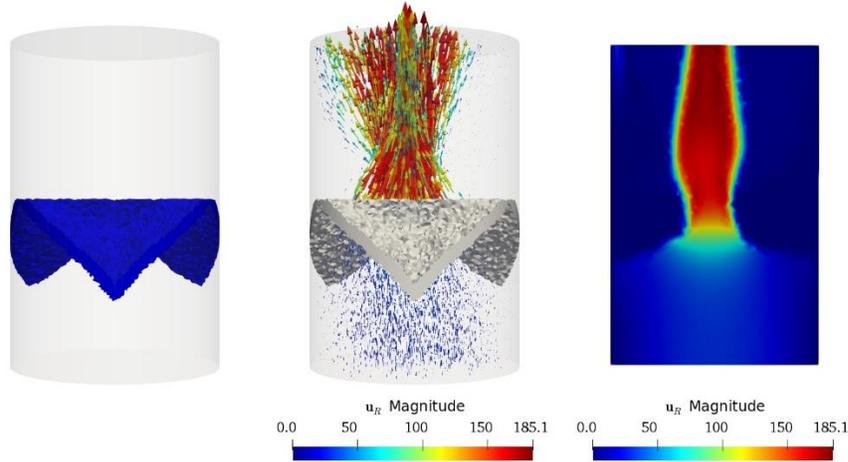


Figura 11. Válvula (izquierda) y velocidad de referencia \mathbf{u}_R en forma de campo vectorial (centro) e isovalores de magnitud (derecha).

4.4 Solución del problema de identificación de parámetros en 3D

A diferencia del caso 2D, el funcional J solo comparará la interpolación de las velocidades \mathbf{u} y \mathbf{u}_{OBS} en el espacio \mathbb{P}_1 , debido a que el cálculo es más preciso prescindiendo de las funciones burbuja. Para la prueba de referencia, se consideran mediciones en todo el dominio. En la Figura 12, se aprecia que el óptimo γ^* asume valores cercanos a 0 en zonas anteriores y posteriores a la válvula, como también en la zona entre las válvulas. Eligiendo la región donde γ^* tiene valores iguales o mayores a $0.4\max\{\gamma^*(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \Omega\}$, siguiendo un criterio de umbral para identificar la válvula, se aprecia que dicha región delimita el espacio entre las válvulas. La magnitud y dirección de \mathbf{u}^* es similar a \mathbf{u}_R . El óptimo β^* es próximo al valor de referencia, pero menos próximo que en la estimación para el caso 2D.

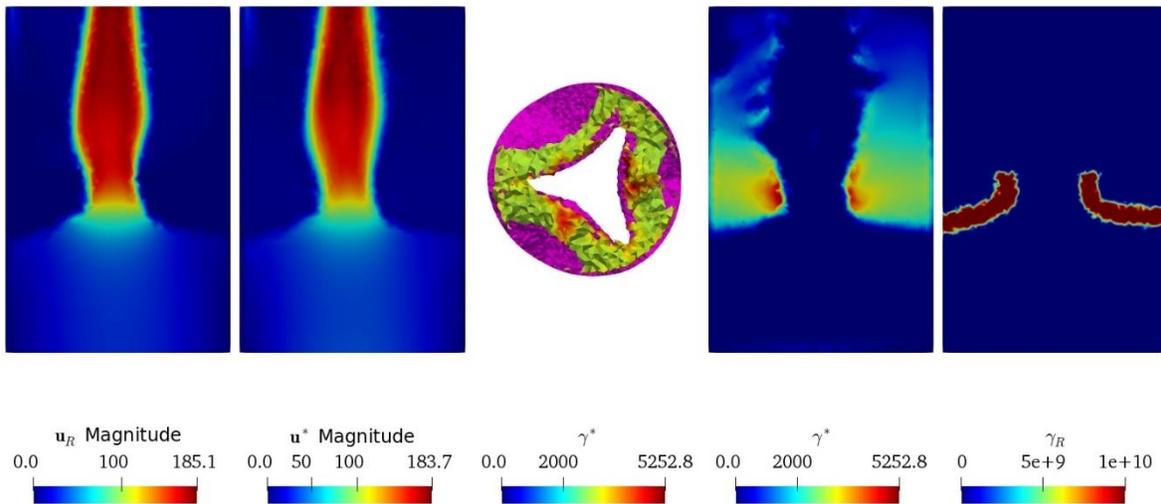


Figura 12. Cortes de isovalores de \mathbf{u}_R y \mathbf{u}^* , comparación entre γ_R (magenta) y γ^* , cortes de isovalores de γ^* y γ_R (de izquierda a derecha). Prueba de referencia 3D, 460 iteraciones, $\beta^* = 36.3068$.

De forma análoga al caso 2D, es posible realizar una proyección de la velocidad de referencia \mathbf{u}_R en el espacio \mathbb{Q}_0 con una malla de hexaedros de lado 1 mm con el fin de simular una 4D Flow MRI, el cual es nuevamente proyectado al espacio \mathbb{P}_1 definido en la misma malla del dominio virtual. Así, se obtiene una nueva velocidad de referencia para la prueba de MRI. Los resultados obtenidos son similares a los de la prueba de referencia, observando una mejor predicción del parámetro β , correspondiente a la máxima velocidad en la entrada, obteniendo un óptimo $\beta^* = 35.6507$. Sin embargo, el solver requiere más de 100 iteraciones adicionales para cumplir los criterios de convergencia en comparación con la prueba de referencia.

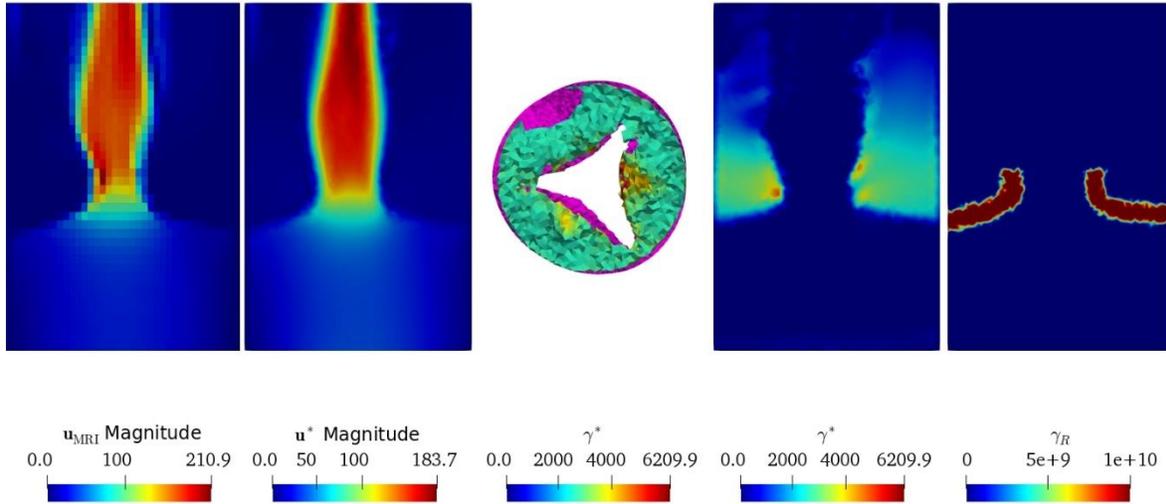


Figura 13. Cortes de isovalores del MRI simulado \mathbf{u}_R y \mathbf{u}^* , comparación entre γ_R (magenta) y γ^* , cortes de isovalores de γ^* y γ_R (de izquierda a derecha). Prueba de MRI 3D, 566 iteraciones, $\beta^* = 35.6507$.

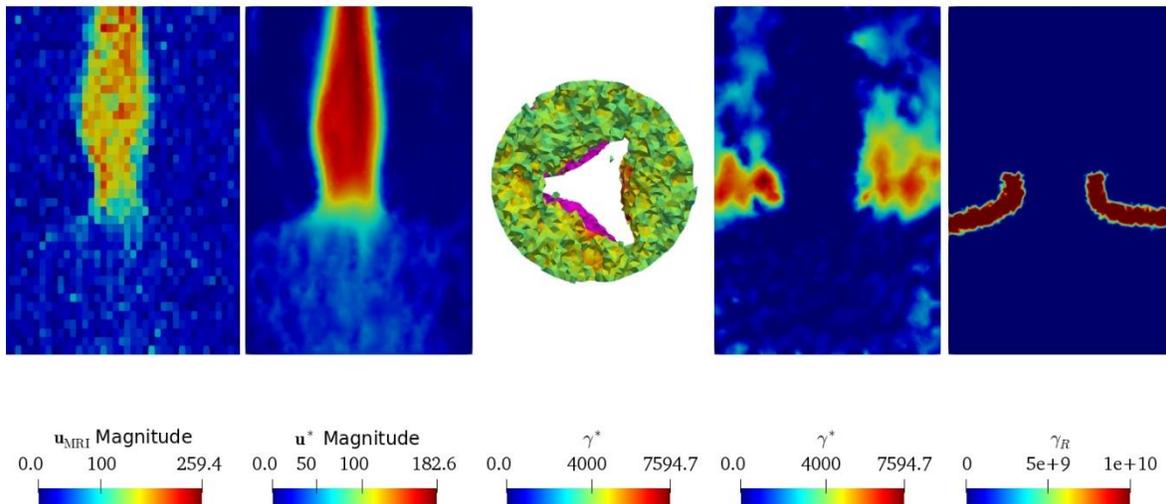


Figura 14. Cortes de isovalores del MRI simulado \mathbf{u}_R y \mathbf{u}^* , comparación entre γ_R (magenta) y γ^* , cortes de isovalores de γ^* y γ_R (de izquierda a derecha). Prueba de MRI 3D con 10% de ruido, 566 iteraciones, $\beta^* = 35.3435$.

También se realizaron simulaciones con ruido gaussiano con niveles de ruido proporcional a la velocidad máxima absoluta en cada dirección con niveles de 10% y 20% de ruido. Si bien las aproximaciones son de peor calidad a medida que el ruido crece, siguiendo una tendencia similar al caso 2D, la reconstrucción del espacio entre las válvulas para el caso con 10% de ruido es similar al obtenido en la prueba de MRI tal como se aprecia en las Figuras 13 y 14. Sin embargo, γ^* presenta ruido numérico debido al sobreajuste de los datos. Los resultados empeoran cuando se presenta 20% de ruido gaussiano, donde además γ^* no es comparable con la referencia γ_R .

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Hemos presentado un nuevo problema de identificación de parámetros para determinar una aproximación del parámetro de permeabilidad en ecuaciones de Navier-Stokes, contribuyendo a la detección de obstáculos y deformaciones de dominio en estudios fluidodinámicos. Desde una base matemática, este problema posee solución y condiciones de optimalidad que permiten el uso de algoritmos de minimización y aproximaciones numéricas para su solución computacional.

Los experimentos numéricos presentados muestran gran precisión y estabilidad en el caso 2D, especialmente en los experimentos sin ruido. En ellos se evidencia que la válvula reconstruida representa a la estructura a reconocer, sirviendo como una herramienta diagnóstica para el personal médico. Los experimentos con ruido gaussiano para el MRI simulado requieren un postproceso simple, lo que permite su implementación en solvers numéricos basados en el método de elementos finitos. También se presenta una degradación de las estimaciones obtenidas a medida que el nivel de ruido crece, lo cual es esperable en estas situaciones.

Si bien los resultados del caso 3D generaron resultados cualitativamente similares a los del caso 2D, el criterio de umbral no es suficientemente bueno para reconstruir el espacio entre las válvulas y el tiempo de ejecución es elevado debido a la gran cantidad de grados de libertad empleados para su aproximación mediante el método de elementos finitos. Dado que el modelo 3D es de particular interés para la comunidad médica, dado que puede constituir una herramienta para el diagnóstico de afecciones valvulares, el diseño de un algoritmo simplificado de nuestro solver numérico es parte de nuestro trabajo futuro.

AGRADECIMIENTOS

Jorge Aguayo es parcialmente financiado por la BECA DOCTORADO NACIONAL 2018-21180642 de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID).

Cristóbal Bertoglio es financiado por el Consejo Europeo de Investigación (ERC) bajo el Programa Marco de I+D Horizonte 2020 de la Unión Europea (852544-CardioZoom).

Axel Osses es parcialmente financiado por los fondos ANID-Fondecyt 1191903, 1201311, CMM ACE210010 y FB210005 Basal de ANID, y los proyectos FONDAP/15110009, Programa Milenio NCN17-1, NCN19-161 y ACIPDE MATH190008 CYAN Cimat-Amsu.

REFERENCIAS

- Aguayo, J., Bertoglio, C. y Osses, A. (2021). "A distributed resistance inverse method for flow obstacle identification from internal velocity measurements". *Inverse Problems*. Vol. 37, No. 2, pp 025010.
- Aguayo, J. y Carrillo, H. (2022). "Analysis of obstacles immersed in viscous fluids using Brinkman's law for steady Stokes and Navier-Stokes equations". *SIAM Journal on Applied Mathematics*. Vol. 82, No. 4, pp 1369-1386.
- Aguayo, J., y Osses, A. (2022). "A stability result for the identification of a permeability parameter on Navier–Stokes equations". *Inverse Problems*. Vol. 38, No. 7, pp 075001.
- Astorino, M., Hamers, J., Shadden, S.C. y Gerbeau, J.F. (2012). "A robust and efficient valve model based on resistive immersed surfaces". *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. Vol. 28, No. 9, pp 937-959.
- Auriault, J.L. (2008). "On the domain of validity of Brinkman's Equation". *Transport in Porous Media*. Vol. 79, No. 2, pp 215-223.
- Braack, M. y Mucha, P.B. (2014) "Directional Do-Nothing Condition for the Navier-Stokes Equations". *Journal of Computational Mathematics*. Vol. 32, No. 5, pp 507-521.
- Brinkman, H. C. (1949). "A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles". *Flow, Turbulence and Combustion*. Vol 1. No 1.
- Caiazzo, A., Fernández, M.A., Gerbeau, J.F. y Martin, V. (2011). "Projection schemes for fluid flows through a porous interface". *SIAM Journal on Scientific Computing*. Vol. 33, No. 2, pp 541-564.
- Dyverfeldt, P., Bissell, M., Barker, A.J., Bolger, A.F., Carlhäll, C.J., Ebbers, T., Francios, C.J., Frydrychowicz, A., Geiger, J., Giese, D., Hope, M.D., Kilner, P.J., Kozerke, S., Myerson, S., Neubauer, S., Wieben, O., Markl, M. (2015). "4D flow cardiovascular magnetic resonance consensus statement". *Journal of Cardiovascular Magnetic Resonance*, Vol. 17, No. 1.
- Fattouch, K., Lancellotti, P., Vannan, M. y Speziale, G. (2018) *Advances in Treatments for Aortic Valve and Root Diseases*. Springer. Berlín, Alemania.
- Haj-Ali, R., Marom, G., Ben Zekry, S., Rosenfeld, M. y Raanani, E. (2012). "A general three-dimensional parametric geometry of the native aortic valve and root for biomechanical modelling". *Journal of Biomechanics*. Vol. 45, No. 14, pp. 2392-2397.
- Haldenwang, R., Slatter, P., y Chhabra, R. (2010) "An experimental study of non-newtonian fluid flow in rectangular flumes in laminar, transition and turbulent flow regimes". *J. South African Inst. Civil Eng.*, Vol. 52, No. 1, pp. 11-19.
- Iung, B. y Vahanian, A. (2011). "Epidemiology of valvular heart disease in the adult". *Nature Reviews Cardiology*, Vol. 8, No. 3, pp. 162-172
- Mayo, J.R., y Leipsic, J.A. (2009). "Radiation Dose in Cardiac CT". *American Journal of Roentgenology*, Vol. 192, No. 3, pp. 646-653.

ACERCA DE LOS AUTORES

Jorge Aguayo es ingeniero civil matemático de la Universidad de Concepción y candidato a Doctor de la Universidad de Chile (Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, mención Modelamiento Matemático) y la Universidad de Groningen en un programa de cotutela. Su

tesis “An inverse problem in Fluid Mechanics applied in Biomedicine” es codirigida por los profesores Axel Osses y Roel Verstappen, con Cristóbal Bertoglio como cosupervisor.

Cristóbal Bertoglio es Doctor en Matemática Aplicada del INRIA y Universidad Paris VI (2012) y profesor asistente en el Bernoulli Institute de la Universidad de Groningen, Países Bajos. Lidera el proyecto de investigación CardioZoom, cuyo objetivo es presentar métodos novedosos para configurar modelos computacionales que modelan el funcionamiento del corazón humano y mejorar las técnicas de diagnóstico de algunas enfermedades.

Axel Osses es Doctor en Matemáticas Aplicadas de la Ecole Polytechnique en París, Francia (1998) y profesor titular del Departamento de Ingeniería Matemática de la Universidad de Chile e investigador asociado del Centro de Modelamiento Matemático de dicha universidad. está vinculada a problemas de control e inversión en ecuaciones diferenciales parciales, con vínculos interdisciplinarios en cambio climático y resiliencia, modelamiento geológico, biología, medicina y astronomía.

FLUJO EN ARTERIAS CON ANEURISMA CEREBRAL: UN ANÁLISIS NUMÉRICO EN RÉGIMEN PERMANENTE E IMPERMANENTE

RODRIGO JAVIER GONZÁLEZ HERRERA

Alumno del Programa de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería mención Fluidodinámica,
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

rodrigojgonzalez@hotmial.com

ORCID: 0000-0002-0253-2129

RESUMEN

Se resuelve de manera numérica el flujo sanguíneo para dos arterias carótidas internas con aneurismas, tanto para el régimen permanente e impermanente, donde este último considera la pulsación del flujo sanguíneo. Se analiza el comportamiento de la presión, esfuerzo de corte en las paredes y velocidades para ambos regímenes, además de la utilidad de realizar un análisis preliminar en régimen permanente para posteriormente realizar un análisis considerando las variaciones temporales del flujo. La sangre se modela como un fluido no newtoniano tipo Carreau.

Palabras claves: Flujo sanguíneo, Aneurisma, Fluidos no newtonianos, CFD, ANSYS.

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Una de las aplicaciones más sencillas de las ecuaciones que rigen el movimiento de fluidos incompresibles consiste en el estudio del flujo en una tubería circular. Es común en los cursos introductorios a la dinámica de fluidos que este sea uno de los primeros problemas que se resuelve cuando se introducen las leyes del movimiento de los fluidos. Es interesante notar que el estudio del flujo generado por un gradiente de presión en un tubo cilíndrico, ahora conocido como flujo de Poiseuille, fue intensamente estudiado experimentalmente por el médico francés Jean-Louis-Marie Poiseuille, quien estaba interesado en el flujo sanguíneo en el cuerpo humano (Britannica, 2022). Además del flujo sanguíneo en seres vivos, las aplicaciones del flujo en ductos a presión en la vida cotidiana son múltiples, como las relacionadas con las tuberías que alimentan los hogares con agua potable, procesos industriales, etc.

Este estudio se centra en analizar los efectos de la presencia de aneurismas en dos arterias carótidas internas, tanto para el caso permanente e impermanente, considerando pulsaciones naturales del flujo sanguíneo y lo efectos que tiene la presencia de los aneurismas para el flujo. El estudio se realiza por medio de soluciones numéricas de las ecuaciones del movimiento empleando el software ANSYS Fluent.

2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

La primera versión de las ecuaciones para la dinámica de los fluidos newtonianos fue deducida por C-L Navier (1823) y posteriormente las dedujo G. Stokes (1845), quien correctamente identifica el coeficiente asociado a la fuerza de atracción molecular de las ecuaciones de Navier con el coeficiente de viscosidad. Con esta potente herramienta se abordaron de manera analítica múltiples flujos, entre ellos el de un fluido newtoniano laminar en una tubería sometido a un gradiente de presiones constante, determinando relaciones entre el esfuerzo de corte, presión y caudal. Casi un siglo después de los trabajos de Navier y Stokes, Sexl (1930) y Lambossy (1952) abordaron de manera analítica el flujo de un fluido newtoniano en una tubería cilíndrica rígida de radio R , sometido a un gradiente de presión pulsante periódico en régimen laminar, obteniendo la forma que tiene el perfil de velocidades. En 1955, Womersley lleva estos resultados a la práctica, aplicándolos al flujo sanguíneo realizando un análisis para la velocidad, caudal y fuerza de arrastre, además de comparar sus resultados con mediciones realizadas para el flujo en arterias. Debido a la importancia de la publicación de Womersley (1955) es común encontrar en la literatura que el adimensional asociado al flujo pulsante en una tubería se denomine número de Womersley:

$$\alpha^2 = \frac{R^2 \omega}{\mu/\rho} \rightarrow \alpha = R \sqrt{\frac{\omega}{\mu/\rho}} \quad (1)$$

Donde α^2 corresponde a la razón entre la inercia asociada al efecto transiente que genera la pulsación $\rho\omega U$ y la fuerza viscosa $\mu \frac{U}{R^2}$, donde U es la escala de velocidad característica del flujo, R el radio de la tubería cilíndrica, ω la frecuencia de la pulsación, ρ la densidad del fluido y μ la viscosidad dinámica del fluido. α es el número de Womersley.

Si bien el análisis de Womersley es una primera aproximación, varios de los supuestos realizados en su análisis no aplican en el caso del flujo sanguíneo. En primer lugar, la reología de la sangre es no newtoniana debido a su composición, siendo un fluido del tipo “adelgazante” o “*shear thinning*”, ya que la viscosidad se ve reducida al estar sometida a esfuerzos de corte. Además, presenta comportamiento tixotrópico al existir variación en el tiempo de la viscosidad y es viscoelástica ya que exhibe características tanto viscosas como elásticas (Nader et al., 2019).

Una segunda simplificación realizada corresponde al gradiente de presión pulsante empleado. Debido a la forma como el corazón bombea sangre, la variación de la presión sanguínea en las arterias, a pesar de ser periódica, no genera una pulsación sinusoidal.

La tercera simplificación corresponde a la geometría empleada y el comportamiento de las arterias. Evidentemente un cilindro rígido muy largo no siempre es una buena aproximación para las arterias del cuerpo debido a las múltiples geometrías que siguen estos conductos, agregándose el efecto por la existencia de múltiples bifurcaciones y confluencias de los conductos en el sistema circulatorio, al igual que variaciones en el diámetro. Teniendo esto en consideración, las arterias analizadas en el presente estudio presentan importantes deformaciones debido la forma natural de estas o la presencia de un aneurisma, el cual es un crecimiento anormal de alguna protuberancia en la arteria.

Es importante agregar a lo anterior que las arterias no son rígidas, agregando la dinámica del sólido a la del flujo del fluido, quedando un sistema acoplado dinámicamente entre ambos medios si se busca agregar esta componente en el análisis. Por simplicidad, en el estudio que se presenta en este artículo, las paredes de las arterias se consideran rígidas.

En vista de la complejidad de eliminar alguna o todas de las simplificaciones anteriores, un enfoque analítico es inviable y el uso de herramientas computacionales aparecen como una solución al problema. Estas últimas no dejan de tener limitantes, debido a la complejidad de los modelos reológicos y la capacidad de cálculo disponible.

Un ejemplo de los primeros estudios empleando métodos numéricos para el flujo sanguíneo es el de Daly (1976). En este estudio se analizan los efectos de la estenosis (reducción de la sección) en arterias con flujos pulsantes. Daly emplea métodos numéricos (diferencias finitas) para resolver el flujo pulsante en una arteria con una geometría bastante idealizada en presencia de estenosis y despreciando los efectos de los muros para las arterias además de reología newtoniana para la sangre. Los resultados numéricos permiten obtener aparte de la velocidad, como se comporta la presión y tensiones en la arteria. Posteriormente, Nakamura y Sawada (1988) considerando reología no newtoniana para la sangre resolvieron numéricamente (con elementos finitos) el caso de tener estenosis en una sección axisimétrica, determinando valores para la presión y esfuerzo de corte. Además, identificaron los efectos de considerar reología no newtoniana de la sangre para analizar la fuerza que se produce sobre la estenosis. Con el avance de las técnicas computacionales y la capacidad de cálculo en los últimos años se han realizado gran cantidad de estudios numéricos del flujo sanguíneo, incorporando en el análisis algunas de las complejidades asociadas a este flujo. Pontrelli (1998) resolvió numéricamente el flujo pulsante (modelado con una función coseno) para el flujo sanguíneo considerando una tubería rígida y tres reologías distintas (newtoniano generalizado, Oldroyd-B y Oldroyd-B generalizado), comparando resultados numéricos con datos experimentales y determinando cuál reología es la más adecuada para el flujo sanguíneo. Otros estudios más avanzados consideran la geometría compleja de los conductos, distintas reologías de fluido, régimen laminar o turbulento y dinámica de la pared. Por ejemplo, el trabajo de Moradicheghamahi et al. (2019) en Fluent 16.2, donde se estudia el flujo pulsante en la bifurcación carótida construida tridimensionalmente a partir de la información de un paciente, considera dos reologías para la sangre (ley de potencia y Carreau), modelo elástico para la pared, régimen turbulento y el flujo pulsante que corresponde a variaciones del caudal de sangre y presión en el tiempo. Algunos de los resultados del estudio corresponden a la determinación del valor de los esfuerzos de corte sobre las paredes de la arteria y presión, además de otras cantidades derivadas debido a su relación con la aterosclerosis.

Existen estudios numéricos nacionales como el de Valencia (2010) quien abordó los efectos de un aneurisma cerebral ubicado en una arteria con geometría real llevada a una malla computacional, considerando reología no newtoniana para la sangre (modelo de Carreau), interacción con las paredes ya que considera la dinámica de sólidos y las pulsaciones en el tiempo del flujo sanguíneo. Los resultados numéricos permiten un estudio detallado de las velocidades, esfuerzos de corte y variaciones de presión para la arteria y el aneurisma. Otros

ejemplos de trabajos nacionales sobre el flujo sanguíneo corresponden al de Gómez, (2010), quien se enfocó en el efecto que tiene la componente turbulenta del flujo respecto a las soluciones obtenidas en el régimen laminar para una arteria con aneurisma considerando geometrías reales, fluido no newtoniano y flujo pulsante, agregando varios modelos de turbulencia para el análisis. Amigo (2018) realizó un amplio estudio morfológico y hemodinámico para múltiples casos reales de aneurismas cerebrales, empleando reología newtoniana y no newtoniana (Casson), además de los efectos pulsantes para flujo.

3. METODOLOGÍA

Para abordar el análisis del flujo en ambas arterias, de forma preliminar, es necesario determinar las ecuaciones que rigen la dinámica del fluido, los parámetros necesarios y condiciones de borde para resolver numéricamente ambos flujos.

3.1 Ecuaciones del flujo, reología y condiciones de borde

Las ecuaciones que rigen la dinámica del flujo sanguíneo empleadas en este estudio corresponden a la ecuación de continuidad, momentum y una ley constitutiva para la reología de la sangre.

Continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Se considera la sangre como un fluido incompresible con densidad $\rho = 1050 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$ (O'Callaghan, 2006) en las arterias.

Momentum:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho f_x \quad (3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho f_y \quad (4)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (5)$$

Donde ρ la densidad del fluido, (u, v, w) son las componentes del vector de velocidad, τ_{ij} las componentes del tensor de tensiones y ρf_i la fuerza másica que actúa sobre el fluido en cada eje (como la gravedad).

Para las tensiones, es necesario agregar la ecuación constitutiva para el fluido, en este caso la sangre se modela como un fluido no newtoniano tipo Carreau de tres parámetros (Cho y Kensey, 1991).

3.1.1 Ecuaciones constitutivas y reología

Para un fluido incompresible, el tensor de tensiones se define como:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (6)$$

Donde τ_{ij} es el tensor de tensiones, p es el campo escalar de presiones, δ_{ij} es el delta de Kronecker, μ es la viscosidad y ε_{ij} es el tensor de deformación. El tensor de deformación se define en función de las componentes del campo de velocidad del fluido como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \quad (7)$$

Donde γ_{ij} es el tensor de deformación angular.

Considerando la sangre como un fluido tipo Carreau, se tiene la ecuación para la viscosidad:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)(1 + A\dot{\gamma}^2)^n \quad (8)$$

Donde $\dot{\gamma}$, corresponde al segundo invariante del tensor de deformación angular:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ji}} \quad (9)$$

y μ_∞ , μ_0 , A y n , son los parámetros del modelo reológico.

Johnston et al. (2004) entrega los siguientes valores para los parámetros del modelo de Carreau para la sangre: $\mu_\infty = 0.00345 \text{ N s/m}^2$, $\mu_0 = 0.056 \text{ N s/m}^2$, $A = 10.976 \text{ s}^2$ y $n = -0.3216$.

3.1.2 Condiciones de borde

Como se busca comparar los resultados tanto para el caso permanente e impermanente, las condiciones de borde pueden variar entre ambos casos. Sin embargo, para las paredes de las arterias, tanto como en el caso permanente e impermanente, se tiene velocidad nula sobre estas, por lo que se consideran paredes rígidas para simplificar el análisis ya que el objetivo es la comparación de ambas soluciones.

Para las arterias existen entradas y salidas para las cuales es necesario dar condiciones de borde en estas superficies, las que se muestran en las Figs. 1 y 2, que corresponden al CAD de dos arterias (las cuales se denominan en adelante como las arterias N°7 y N° 28, respectivamente), detallando las entradas y salidas de los flujos, además de indicar el aneurisma presente.

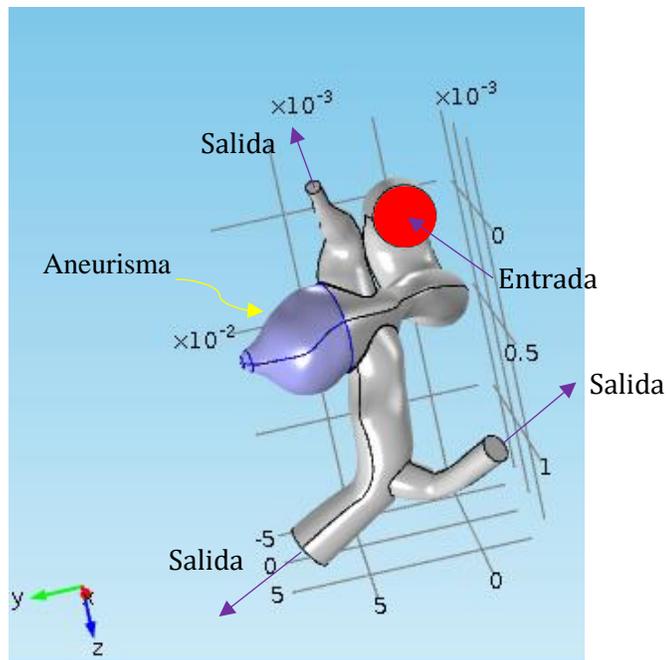


Figura 1. CAD de arteria carótida interior con aneurisma (Arteria N°7) con flujos de entrada y salida para la sangre.

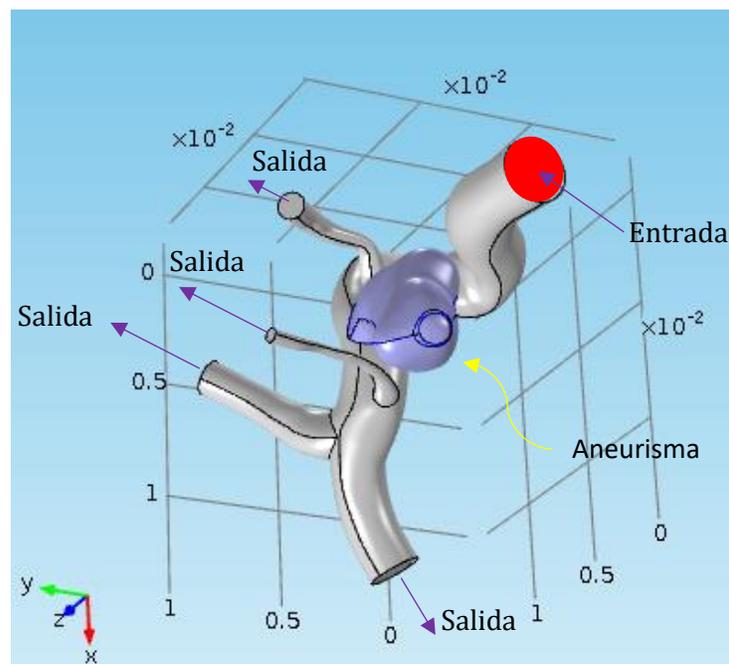


Figura 2. CAD de arteria carótida interior con aneurisma (Arteria N°28) con flujos de entrada y salida para la sangre.

Para el caso impermanente es necesario tener como condiciones de borde la velocidad en la entrada y las presiones en las salidas, ambas con sus respectivas variaciones en el tiempo. Para esto es posible aproximar la velocidad que se tiene en la entrada de la arteria por medio

de una serie de Fourier truncada (Amigo, 2018), replicando las fluctuaciones del flujo sanguíneo para un ciclo cardiaco:

$$V(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^8 a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^8 b_n \sin(n\omega t) \quad (10)$$

Donde los coeficientes a_n y b_n para la velocidad de entrada son:

Tabla 1. Coeficientes para la velocidad de entrada (Amigo,2018).

n	a_n (m/s)[$\times 10^{-2}$]	b_n (m/s)[$\times 10^{-2}$]
0	32.60	-
1	-6.01	-10.29
2	0.28	5.41
3	0.59	-2.28
4	-0.26	1.57
5	0.77	-1.19
6	-0.93	0.55
7	0.87	-0.17
8	-0.56	-0.28

De igual forma, para las salidas, se tiene una expansión en series de Fourier truncada para el comportamiento de la presión:

$$P_{salida}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^8 a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^8 b_n \sin n\omega t \quad (11)$$

Donde los coeficientes a_n y b_n para la presión son:

Tabla 2. Coeficientes para la presión (Amigo,2018).

n	a_n (Pa)	b_n (Pa)
0	12525	-
1	1789	799
2	858	235
3	386	-20
4	187	-181
5	127	-193
6	71	-162
7	19	-143
8	16	-101

La frecuencia para estos ajustes es $\omega = 7.7 \text{ s}^{-1}$, lo que implica un periodo $T = 0.816 \text{ s}$.

La diferencia entre el caso impermanente y permanente, radica en que para el primero, se emplean las expresiones anteriores para agregar los efectos en el tiempo del flujo sanguíneo, mientras que para el caso permanente se considerando los valores máximos para la velocidad en la entrada y presión máxima en las salidas, quedando las condiciones de borde para el caso permanente:

$$P_{salida} = 13000 \text{ Pa} \quad (12)$$

$$V_{entrada} = 0.6 \text{ m/s} \quad (13)$$

Respecto al régimen del flujo, Cebral et al. (2009) obtiene que el número de Reynolds se encuentra entre 380 a 530 para la arteria carótida interna, luego el régimen es laminar.

3.2 CAD, Mallas e indicadores de calidad

Los CAD empleados para resolver numéricamente el flujo en las arterias fueron facilitados por el profesor Álvaro Valencia, del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Chile quien ha guiado y publicado múltiples trabajos relaciones con el tema de flujo sanguíneo y modelación en ANSYS Fluent.

Para la confección de las mallas para resolver el flujo, ANSYS cuenta con distintos métodos de confección, mallado automático, Hex Dominant, Cartesian y Layered Tetrahedrons. Se confeccionaron mallas para el CAD de ambas arterias con los métodos anteriormente mencionados y por medio del indicador de *skewness* se determinó que el mallado automático era el de mejor calidad. Una vez construidas las mallas con el método automático se realizaron refinamientos a estas.

3.2.1 Malla para la arteria N°7

Para la arteria N°7, por medio del método automático en ANSYS, se generó una malla con las siguientes características:

Tabla 3. Características de la malla para el CAD de la arteria N°7

Nodos	47710
Elementos	245480
Tamaño medio elementos	$4 \times 10^{-2} \text{ m}$

Los indicadores de calidad de la malla empleados para evaluar el mallado son el *skewness* y *orthogonal quality*.

Tabla 4. Indicadores de *skewness* para la mallado de la arteria N°7

<i>Skewness</i>	
Máximo	0.9761
Mínimo	6.99×10^{-4}
Promedio	0.2408
Desviación estándar	0.1102

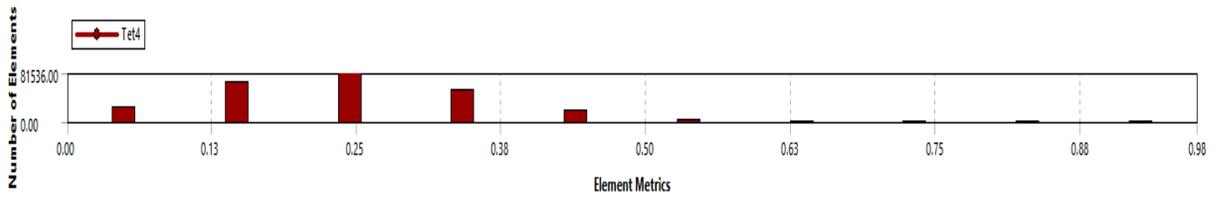


Figura 3. *Skewness* para el mallado de la arteria N°7.

Acorde a la clasificación de la calidad entregada por ANSYS, la gran mayoría de los elementos del mallado se encuentra en el rango 0 a 0.5, concentrándose en tramo 0.13 a 0.38 (lo que se traduce en el valor promedio obtenido para el *skewness*), con lo que se clasifica el mallado como “muy bueno” acorde al *skewness*.

Skewness mesh metrics spectrum:

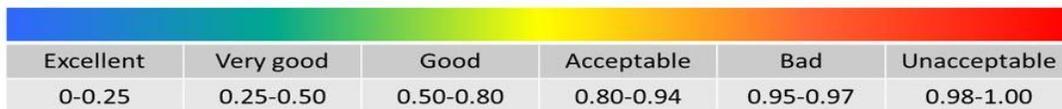


Figura 4. Calidad de la malla según el indicador *skewness*.

Tabla 5. Indicadores de *orthogonal quality* para la mallado de la arteria N°7

Orthogonal Quality	
Máximo	0.9900
Mínimo	2.39×10^{-2}
Promedio	0.7584
Desviación estándar	0.1089

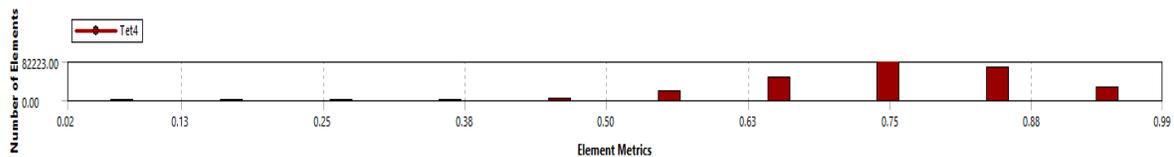


Figura 5. *Orthogonal quality* para el mallado de la arteria N°7.

Orthogonal Quality mesh metrics spectrum:

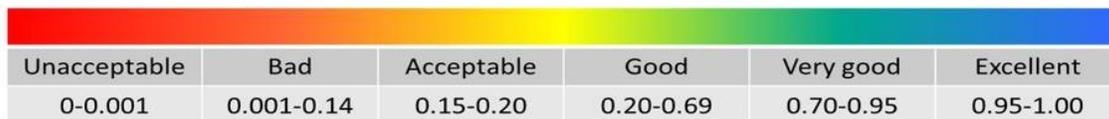


Figura 6. Calidad de la malla según el indicador de *orthogonal quality*.

Considerando la clasificación mostrada, gran parte de los elementos se concentran en el intervalo 0.5 a 0.99, especialmente en el 0.66 a 0.88 (con lo que se obtiene el promedio mostrado en la tabla anterior), acorde a la clasificación se tiene una malla “muy buena”.

Con ambos indicadores mostrando que la calidad de la malla es buena, se concluye que el mallado para la arteria N°7 es el adecuado.

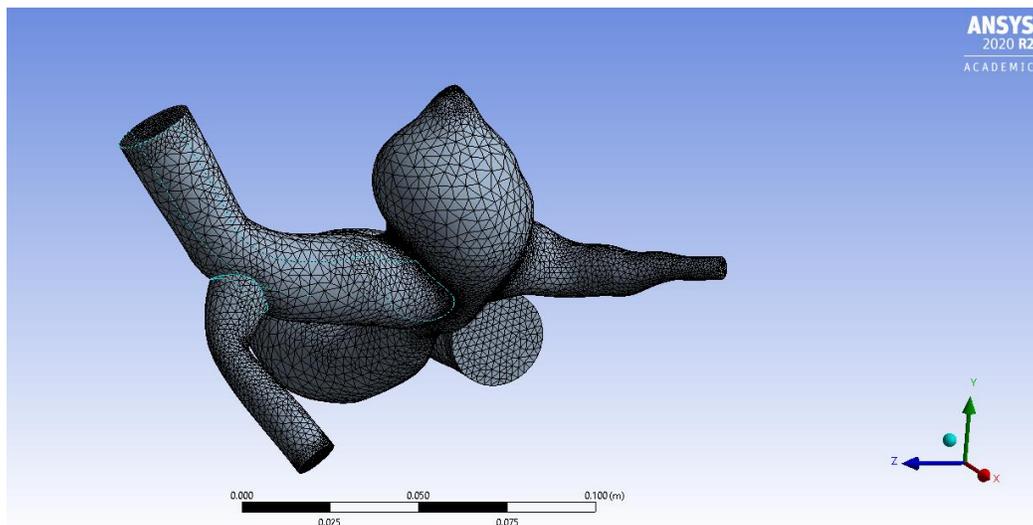


Figura 7. Mallado con refinamientos para la arteria N°7.

3.2.2 Malla para la arteria N°28

Para la arteria N°28, por medio del método automático en ANSYS, se generó una malla con las siguientes características:

Tabla 6. Características de la malla para el CAD de la arteria N°28

Nodos	285281
Elementos	192926
Tamaño medio elementos	2×10^{-3} m

Se emplearon los mismos indicadores de calidad que la malla anterior para evaluar el mallado resultante.

Tabla 7. Indicadores de *skewness* para la mallado de la arteria N°29

<i>Skewness</i>	
Máximo	0.99028
Mínimo	1.27×10^{-3}
Promedio	0.24627
Desviación estándar	0.11453

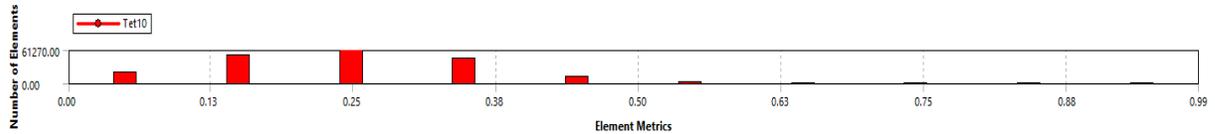


Figura 8. *Skewness* para el mallado de la arteria N°28.

Para la malla de la arteria N°28 se tiene una situación similar a la arteria N°7. Con la clasificación mostrada en la Fig. 4, se observa que la mayoría de los elementos del mallado se encuentra en el rango 0 a 0.5, concentrándose en tramo 0.13 a 0.38 (lo que se traduce en el valor promedio obtenido para el *skewness*), con lo que se clasifica el mallado como “muy bueno”.

Tabla 8. Indicadores de *orthogonal quality* para la mallado de la arteria N°7

<i>Orthogonal Quality</i>	
Máximo	0.9919
Mínimo	9.72×10^{-3}
Promedio	0.7528
Desviación estándar	0.1132

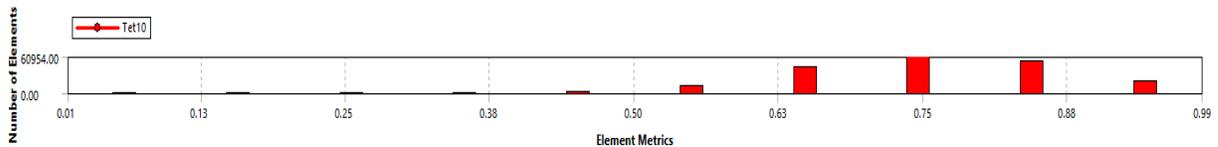


Figura 9. *Orthogonal quality* para el mallado de la arteria N°28.

Con la clasificación mostrada en la Fig.6, gran parte de los elementos se concentran en el intervalo 0.5 a 0.99, especialmente en el 0.66 a 0.88 (con lo que se obtiene el promedio mostrado en la tabla anterior), acorde a la clasificación se tiene una malla “muy buena”.

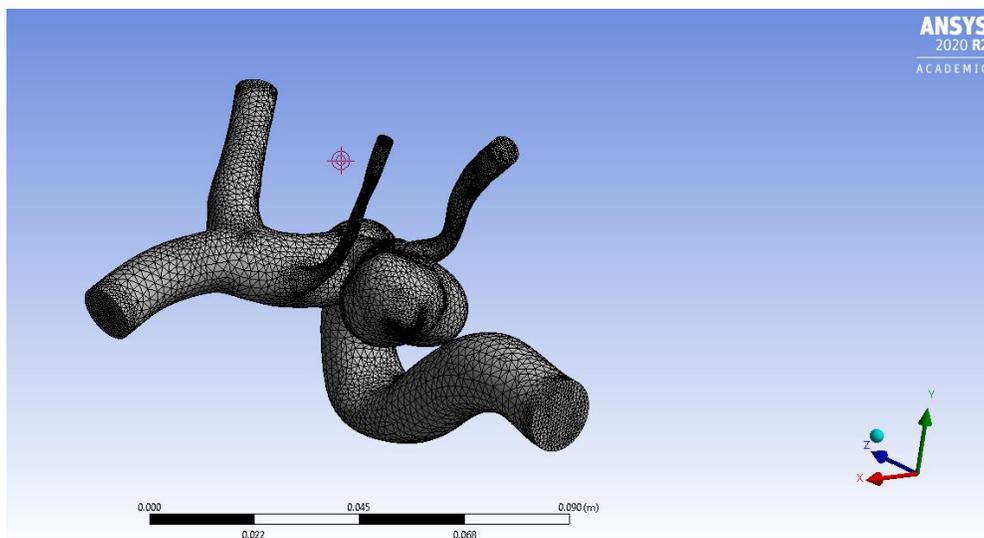


Figura 10. Mallado con refinamientos para la arteria N°7.

Con ambos indicadores mostrando que la calidad de la malla es buena, se concluye que el mallado para la arteria N°28 es el adecuado.

Como el análisis de los indicadores de calidad de ambas mallas es positivo respecto a la calidad de estas, se procede a realizar la configuración en Fluent para los 4 casos a resolver numéricamente (estacionario y transiente para cada malla).

3.3 Configuración y resolución en Fluent

Con las mallas construidas y verificada su calidad, se configura la resolución de ambos problemas (permanente e impermanente) en cada arteria.

Lo primero que se debe ingresar a Fluent es el modelo que se va a emplear, en este caso todos los problemas son laminares y solo se consideran las ecuaciones de momentum y continuidad para resolver el problema. Posteriormente se ingresan los parámetros del fluido para la reología tipo Carreau y su densidad.

En el caso de las paredes, como el sólido se considera rígido, este no requiere parámetros o información al respecto, basta con la condición de velocidad nula en ellas.

Lo siguiente corresponde a ingresar las condiciones de borde del problema en las entradas y salidas del fluido. Para el caso permanente se ingresan los valores constantes para la velocidad en la entrada (velocity inlet) y presión en las salidas (preassure outflow).

Para los casos de transiente se ingresan las expresiones de velocidad media y presión expresadas como series de Fourier truncadas obtenidas por Amigo (2018) empleando la herramienta "Expression" de Fluent que permite ingresar las expansiones en función del tiempo para ser posteriormente vinculadas a las condiciones de borde.

Es necesario seleccionar los métodos de solución y discretizaciones espaciales y de tiempo. Todos los casos se resuelven como un problema transiente, por ende, cada caso requiere definir una discretización de tiempo adecuada para el problema.

Como la frecuencia de la oscilación cardiaca corresponde a 7.7 s^{-1} , se tiene un periodo de 0.816 s. Empleado el tamaño de los elementos de cada arteria se puede realizar una estimación de la discretización de tiempo necesaria. Con el número de Courant y la restricción que este sea menor a 1, la velocidad máxima y tamaño medio de los elementos, se estima una discretización temporal de 0.003 s para ambas arterias.

El esquema de solución empleado es el esquema PISO, que considera una discretización espacial de segundo orden para la presión y un esquema Upwind también de segundo orden para la velocidad, la formulación impermanente también es de segundo orden y es de carácter implícita. Para facilitar el cálculo numérico también se realiza una inicialización híbrida para todos los casos.

Se busca que tener errores residuales menores a 10^{-3} . Para los primeros resultados se empleó un máximo de 20 iteraciones por paso de tiempo, sin embargo, esto llevo a tener errores residuales de continuidad superiores a 10^{-3} , es por esto que el máximo de iteraciones por

paso de tiempo se aumentó a 100, con el fin de asegurar que los errores residuales sean menores a 10^{-3} . Si bien 100 iteraciones parecen un valor elevado, en todos los casos se logró cumplir la condición de tener residuos antes de llegar a las 100 iteraciones por paso de tiempo.

4. RESULTADOS

4.1 Residuos y balances de masa

Uno de los indicadores relevantes para verificar una buena resolución numérica en Fluent es el valor de los residuos de las ecuaciones del problema para los elementos, que en este caso tenían como objetivo ser menor a 10^{-3} , lo que fue posible de obtener tanto para los casos permanentes e impermanentes.

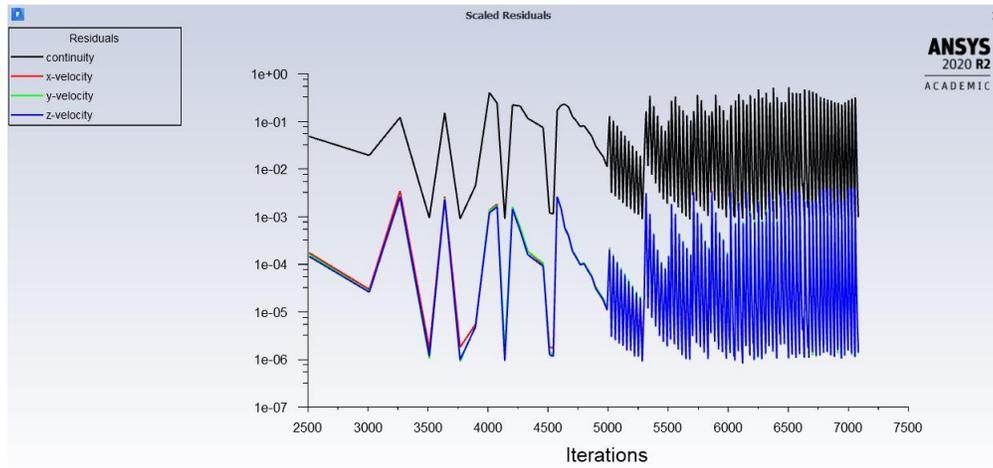


Figura 11. Residuos para la arteria N°7, caso impermanente.

El otro indicador importante es el balance de masa neto que se obtiene de los flujos de masa en las entradas y salidas de cada arteria y verifica que se cumpla conservación de masa, por ende, es deseable que este valor sea lo más pequeño posible. Para los cuatro casos resueltos los valores del balance de la masa neto fueron del orden de 10^{-7} kg/s, asegurando la calidad de la solución numérica en conjunto con los residuos.

Console	
Mass Flow Rate	(kg/s)
entrada	0.059583197
salida_1	-0.0021395369
salida_2	-0.00058525232
salida_3	-0.011772837
salida_4	-0.045084692
Net	8.7908151e-07

Figura 12. Balance de Masa para la arteria N°28, caso impermanente.

4.2 Resultados para la arteria N°7 caso permanente

Se presentan imágenes de los resultados del comportamiento de la presión, esfuerzo de corte y líneas de corriente para la arteria N°7 en régimen permanente, indicando algunas zonas de interés debido a valores extremos observados.

4.2.1 Presiones en las paredes para arteria N°7, caso permanente

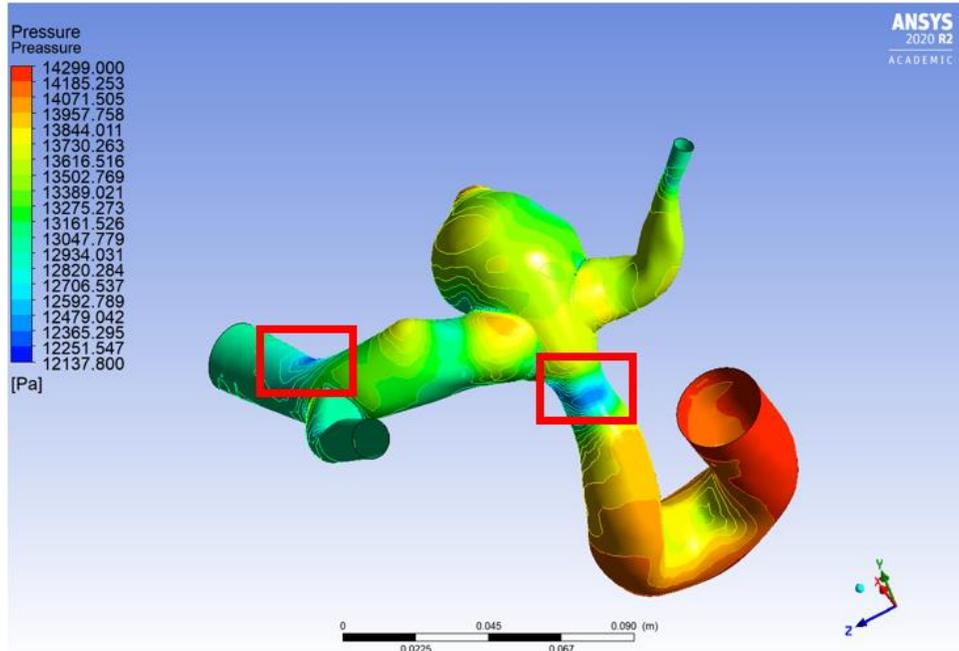


Figura 13. Presión en las paredes de la arteria N°7, caso permanente.

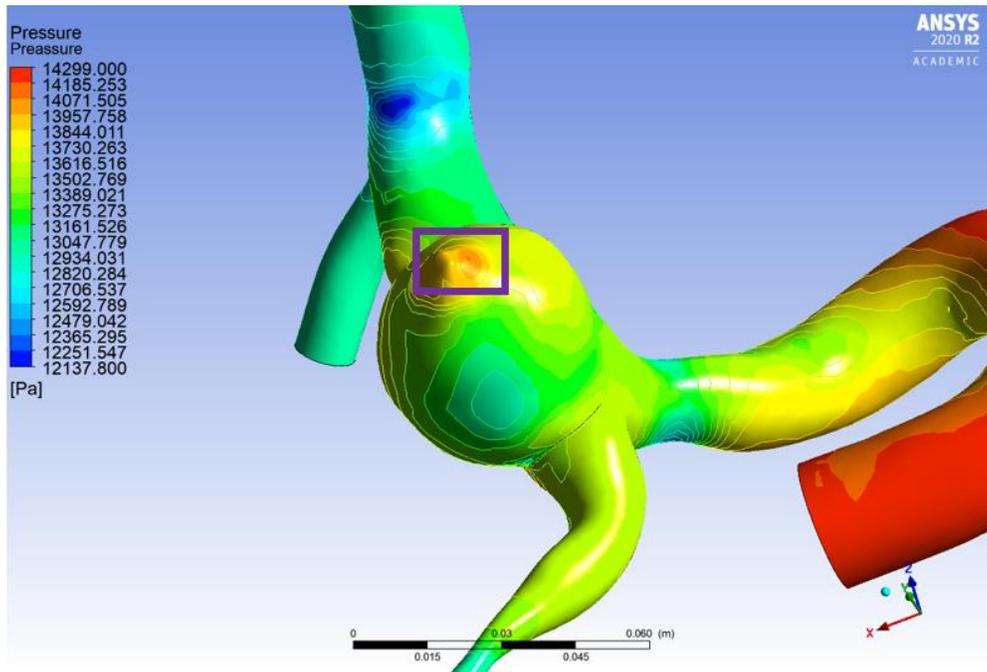


Figura 14. Presión en las paredes de la arteria N°7, caso permanente.

4.2.2 Esfuerzo de corte en la pared para arteria N°7, caso permanente

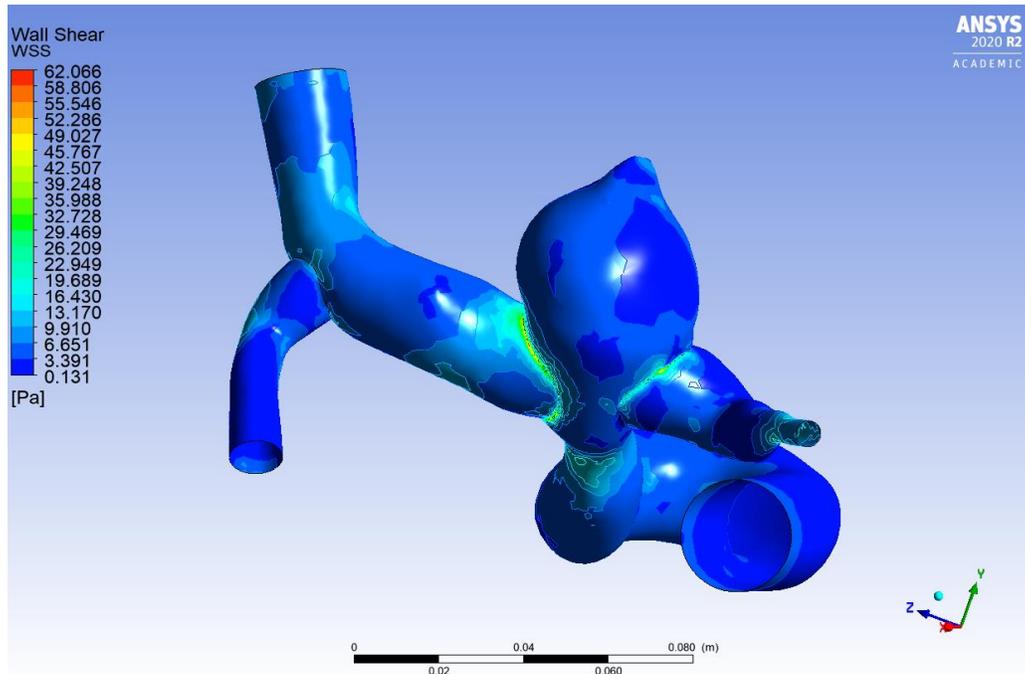


Figura 15. Esfuerzo de corte en la pared para la arteria N°7, caso permanente.

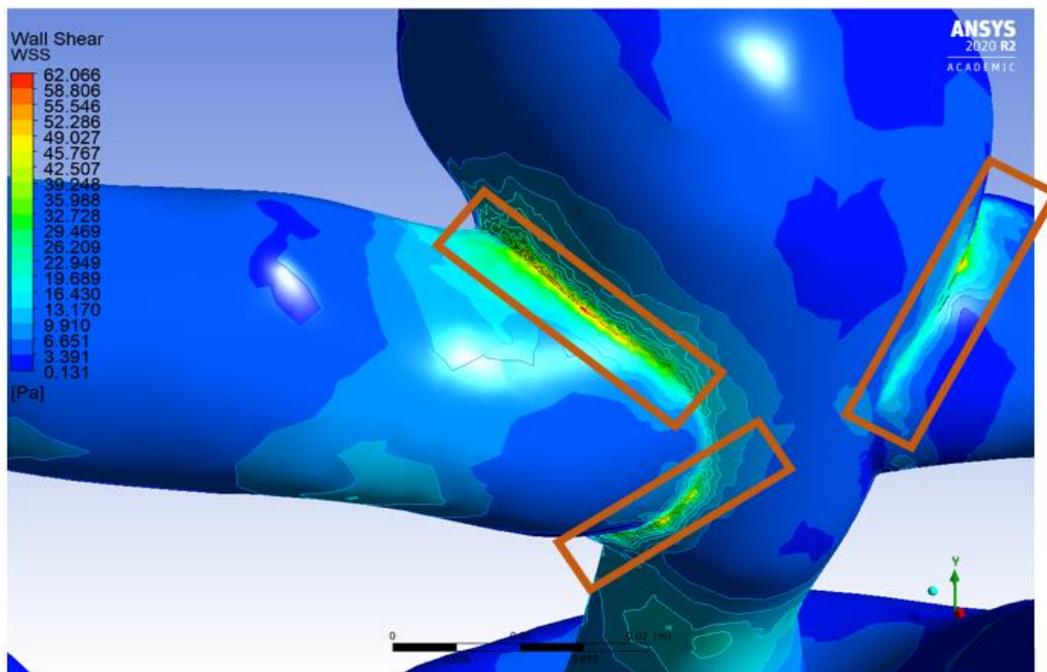


Figura 16. Detalle del esfuerzo de corte en la pared para la arteria N°7, caso permanente.

4.2.3 Líneas de corriente para arteria N°7, caso permanente

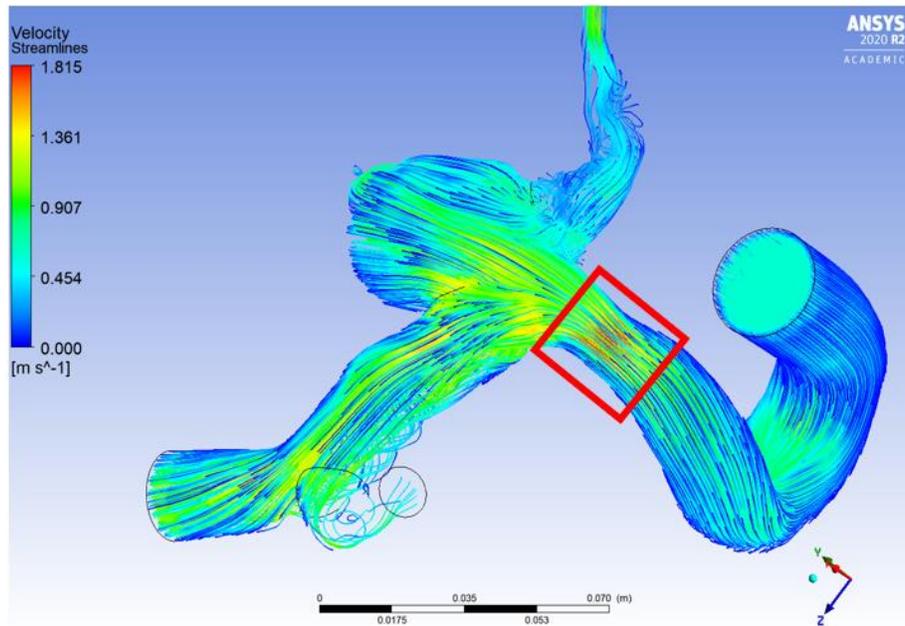


Figura 17. Líneas de corriente la arteria N°7, caso permanente.

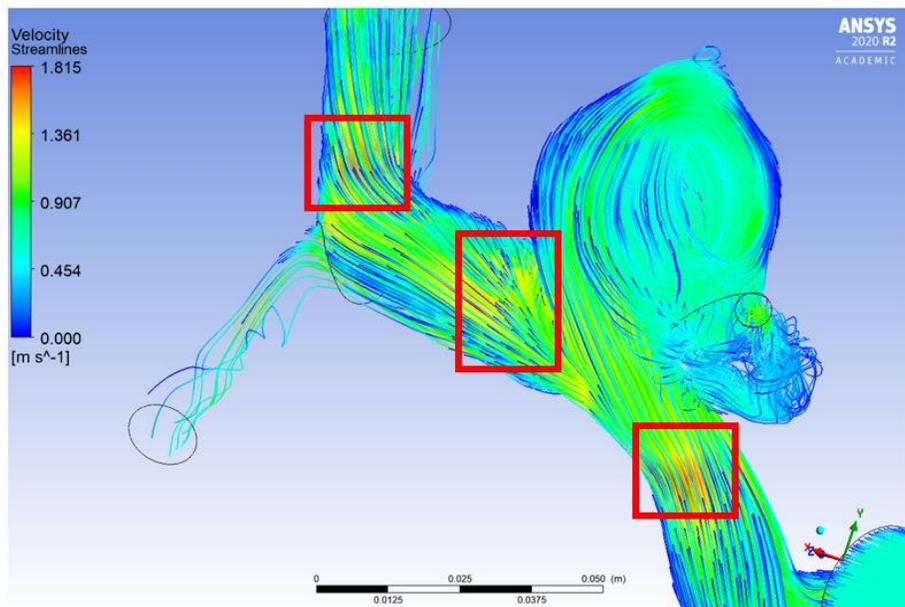


Figura 18. Puntos de interés para las líneas de corriente la arteria N°7, caso permanente.

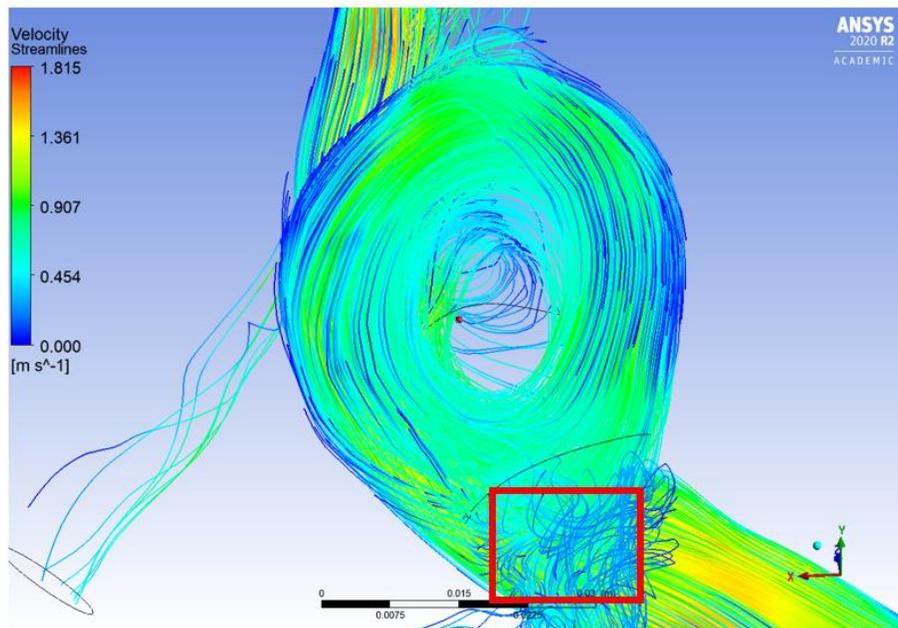


Figura 19. Detalle del comportamiento de las líneas de corriente al interior del aneurisma para la arteria N°7, caso permanente.

4.3 Resultados para la arteria N°28 caso permanente

Se presentan imágenes de los resultados del comportamiento de la presión, esfuerzo de corte y líneas de corriente para la arteria N°28 en régimen permanente, indicando algunas zonas de interés.

4.3.1 Presiones en las paredes para arteria N°28, caso permanente

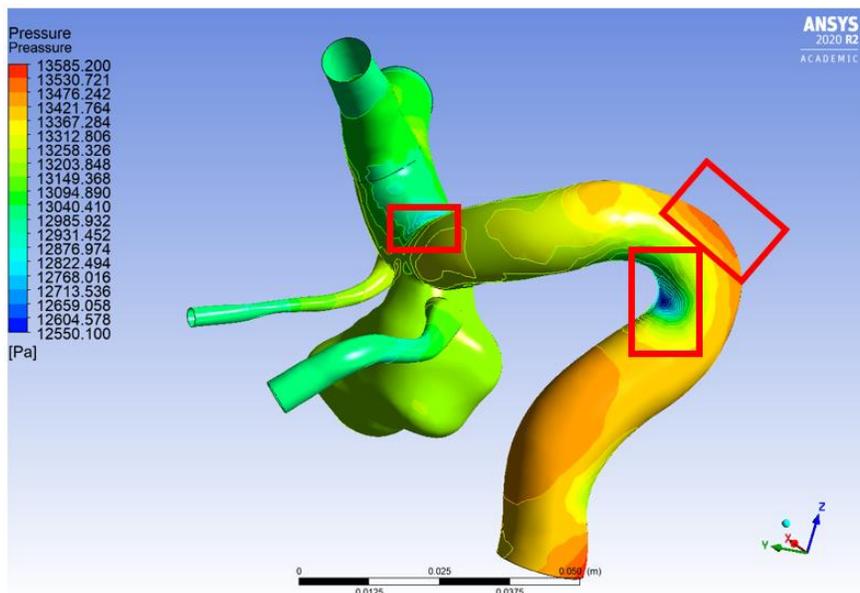


Figura 20. Presión en las paredes de la arteria N°28, caso permanente.

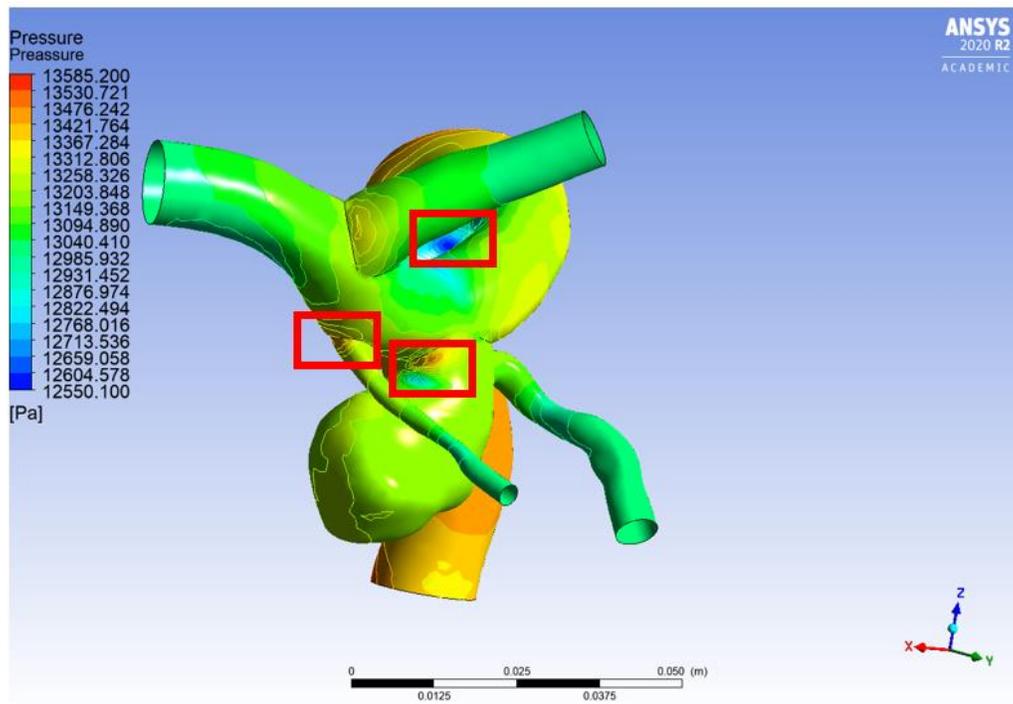


Figura 21. Presión en las paredes de la arteria N°28, caso permanente.

4.3.2 Esfuerzo de corte en la pared para arteria N°28, caso permanente

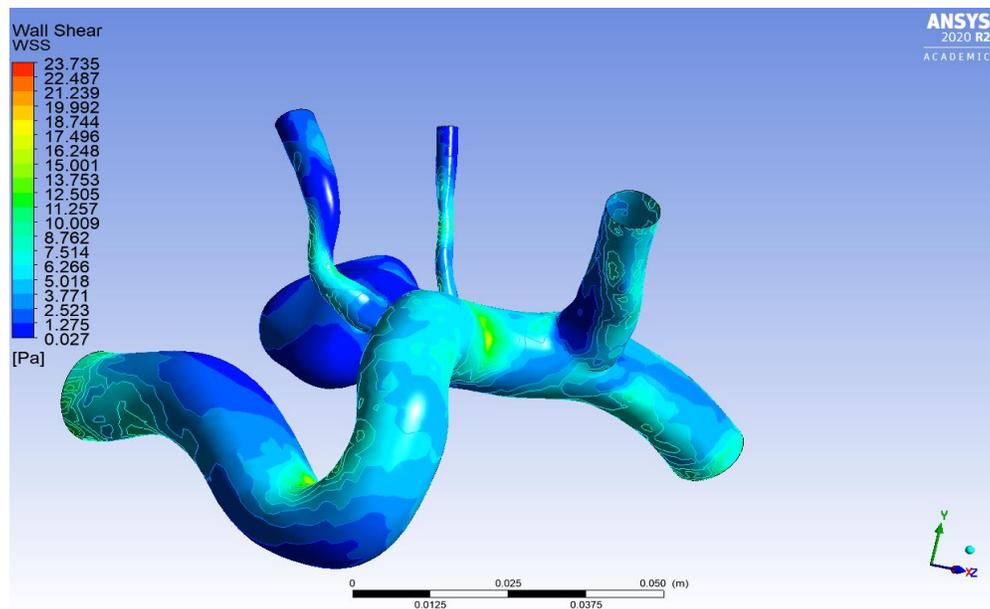


Figura 22. Esfuerzo de corte en la pared para la arteria N°28, caso permanente.

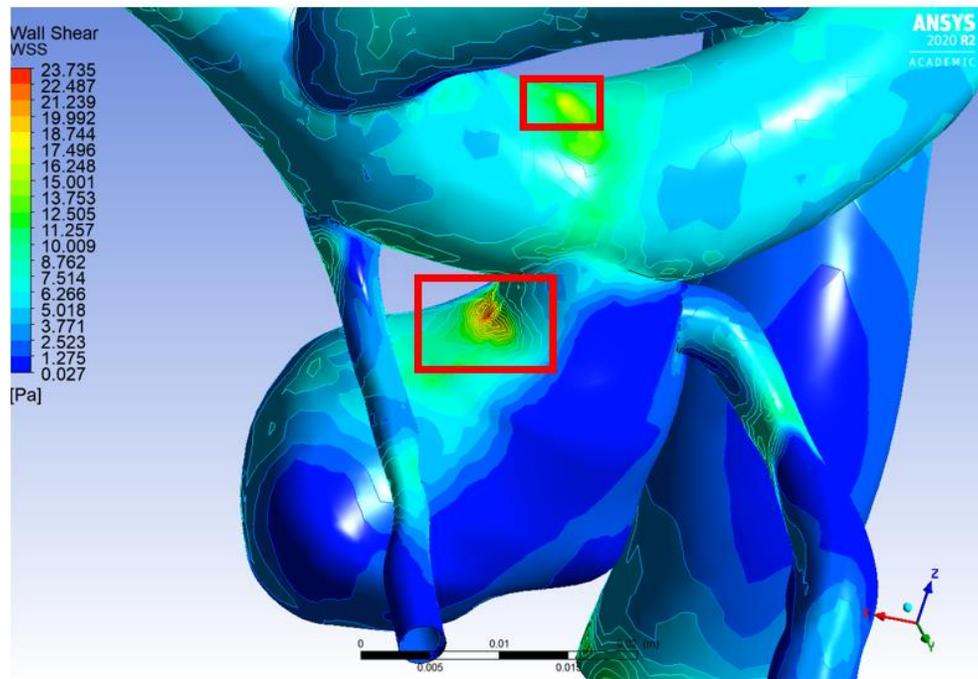


Figura 23. Detalle del esfuerzo de corte en la pared para la arteria N°28, caso permanente.

4.3.3 Líneas de corriente para arteria N°28, caso permanente

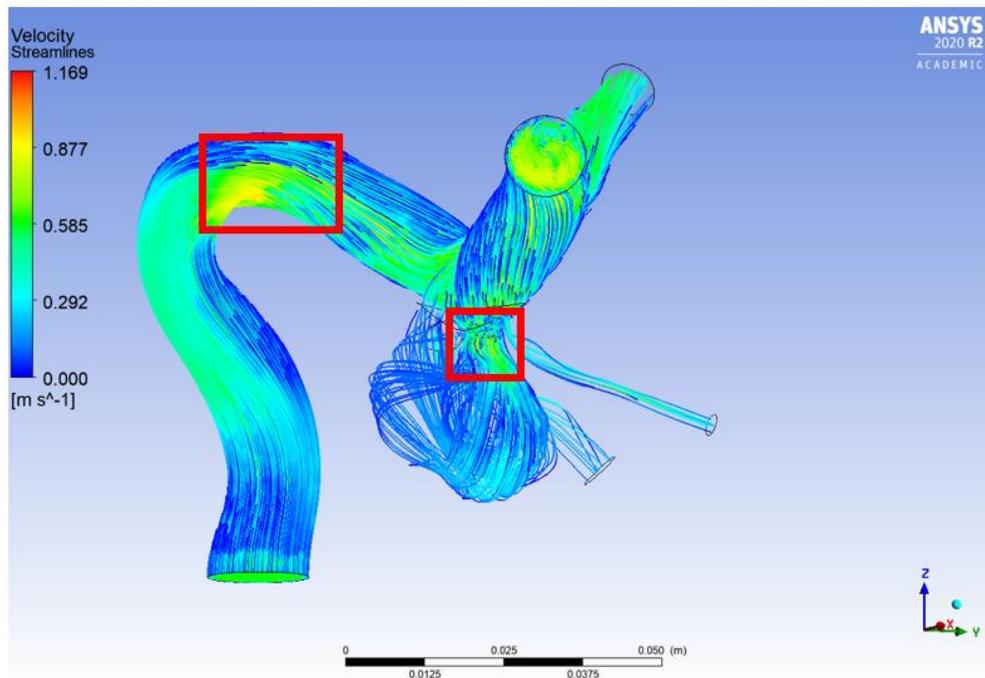


Figura 24. Puntos de interés para las líneas de corriente la arteria N°28, caso permanente.

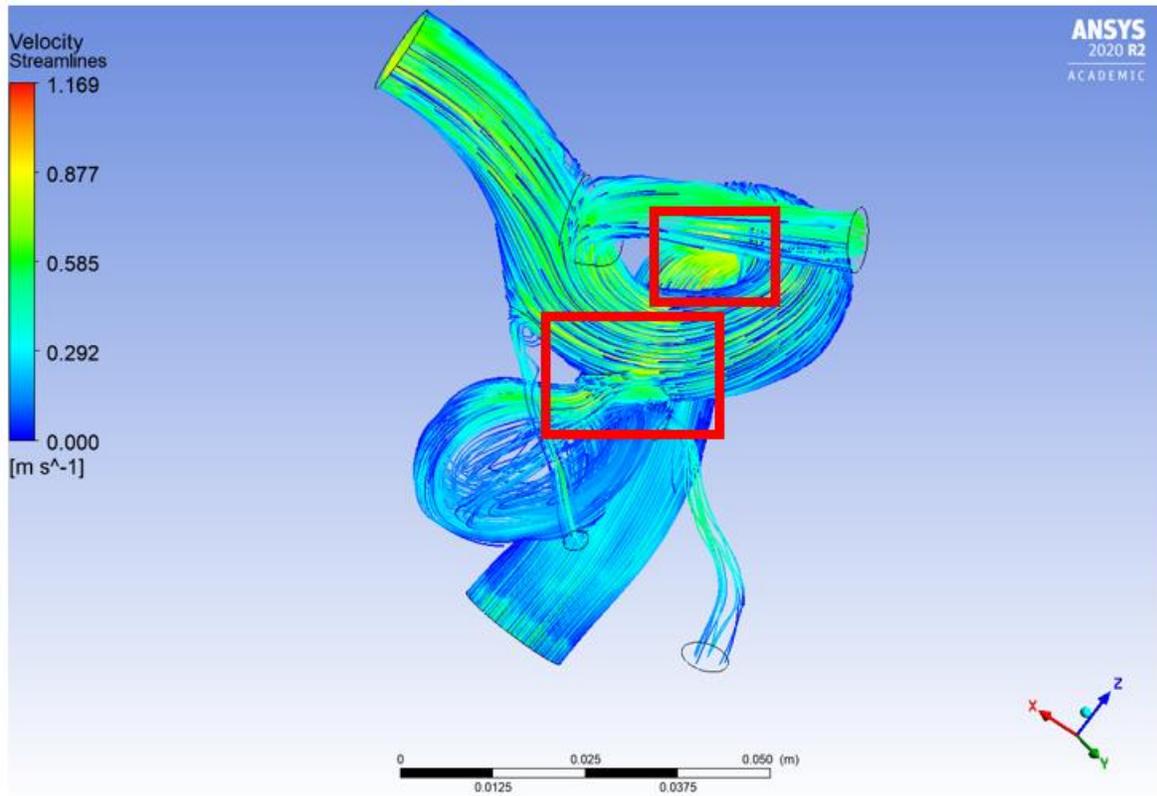


Figura 25. Puntos de interés para las líneas de corriente la arteria N°28, caso permanente.

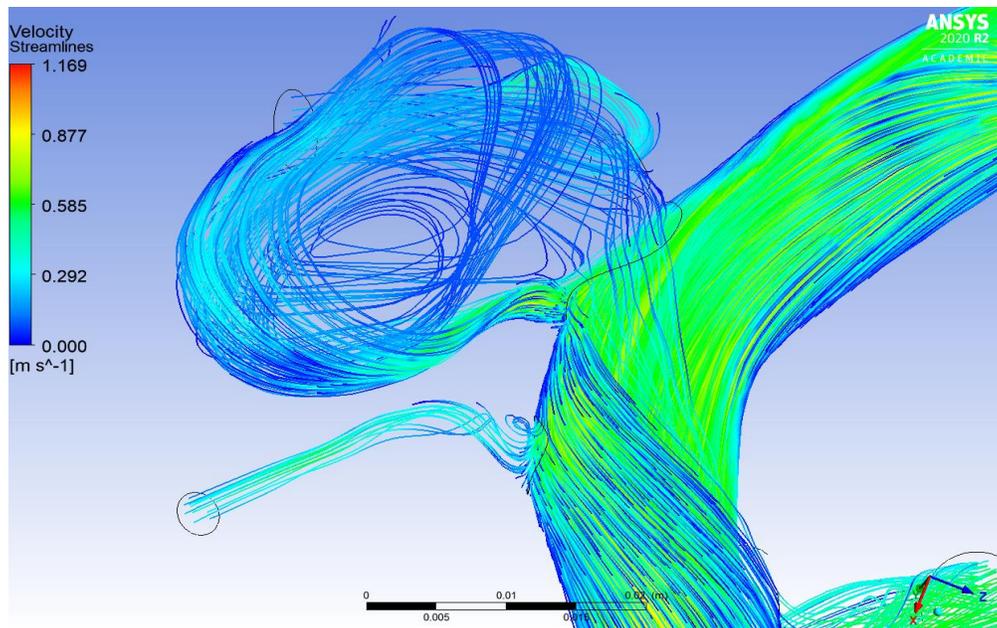


Figura 26. Detalle del comportamiento de las líneas de corriente al interior del aneurisma para la arteria N°28, caso permanente.

4.4 Resultados para la arteria N°7 caso impermanente

Se presentan imágenes para distintos tiempos del comportamiento de la presión, esfuerzo de corte y líneas de corriente para la arteria N°7 en régimen impermanente.

4.4.1 Presiones en las paredes para arteria N°7, caso impermanente

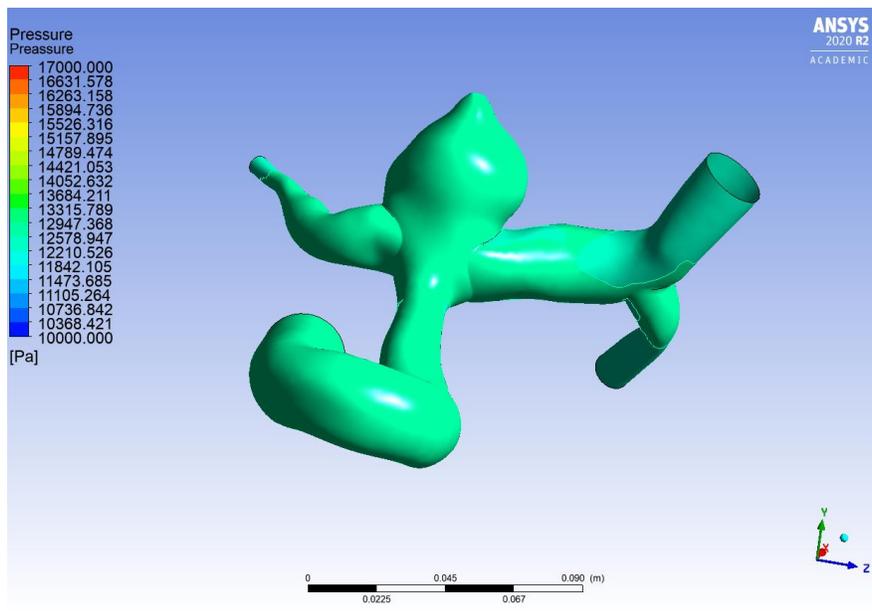


Figura 27. Presión en las paredes de la arteria N°7 para $t=0.204$ s.

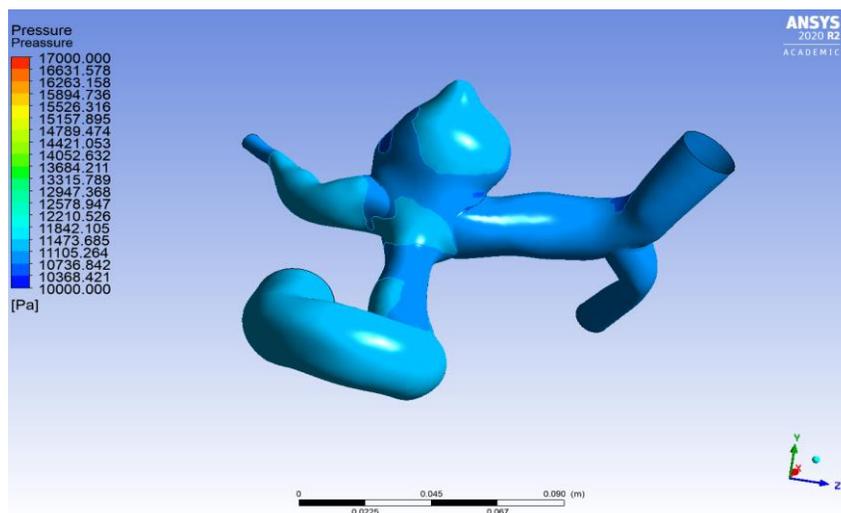


Figura 28. Presión en las paredes de la arteria N°7 para $t=0.612$ s.

4.4.2 Esfuerzo de corte en la pared para arteria N°7, caso impermanente

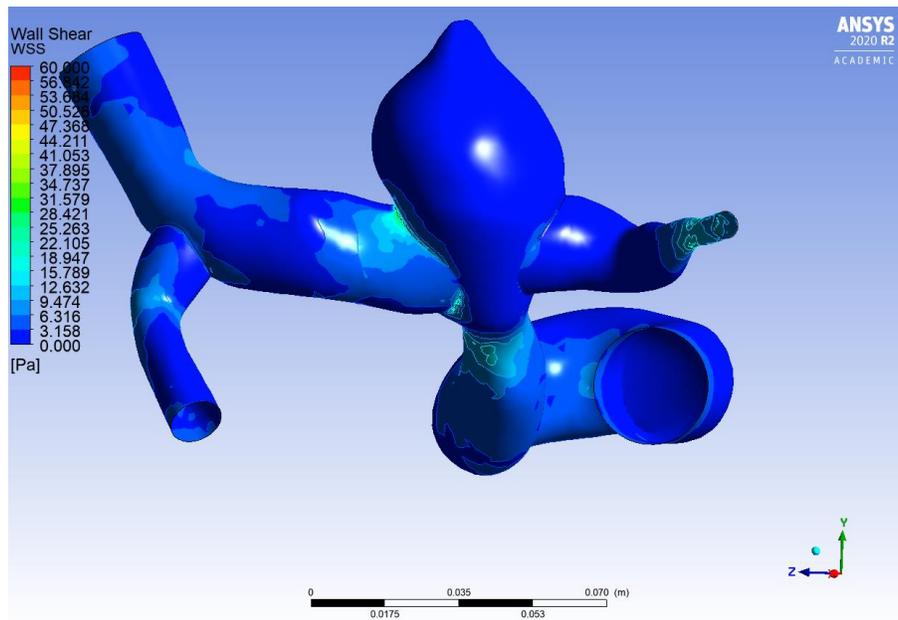


Figura 29. Esfuerzo de corte en las paredes de la arteria N°7 para $t=0.45$ s.

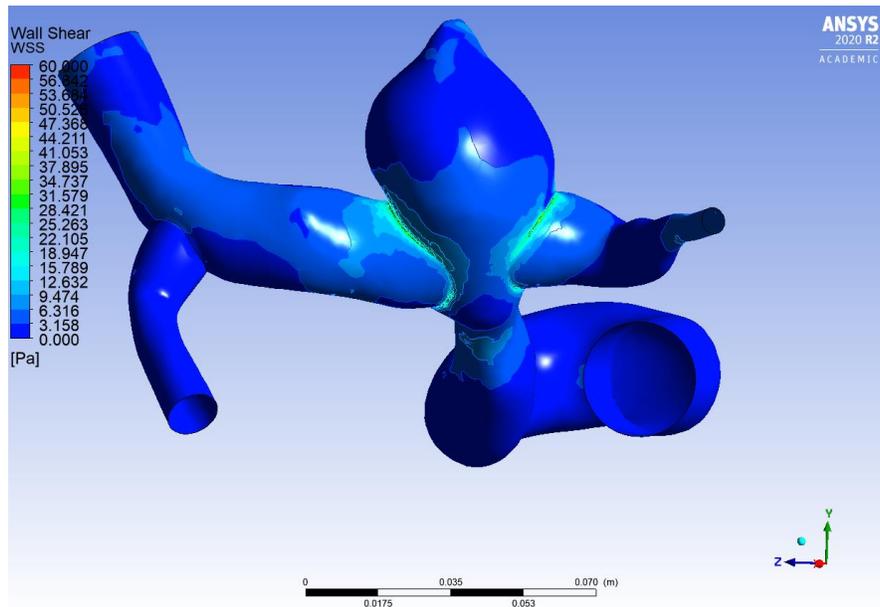


Figura 30. Esfuerzo de corte en las paredes de la arteria N°7 para $t=0.75$ s.

4.4.3 Líneas de corriente para arteria N°7, caso impermanente

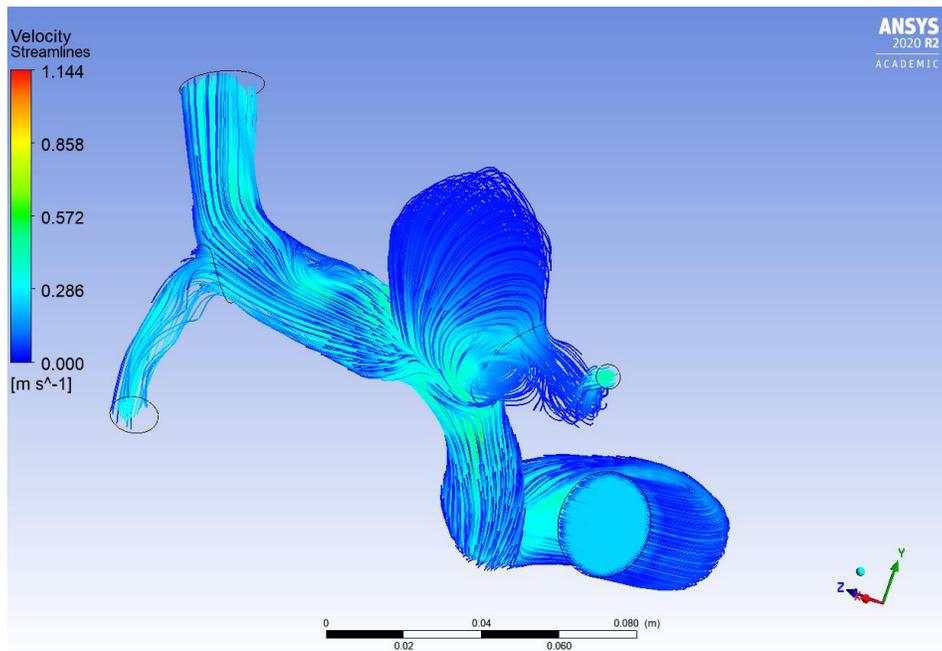


Figura 31. Líneas de corriente la arteria N°7 para $t=0.237$ s.

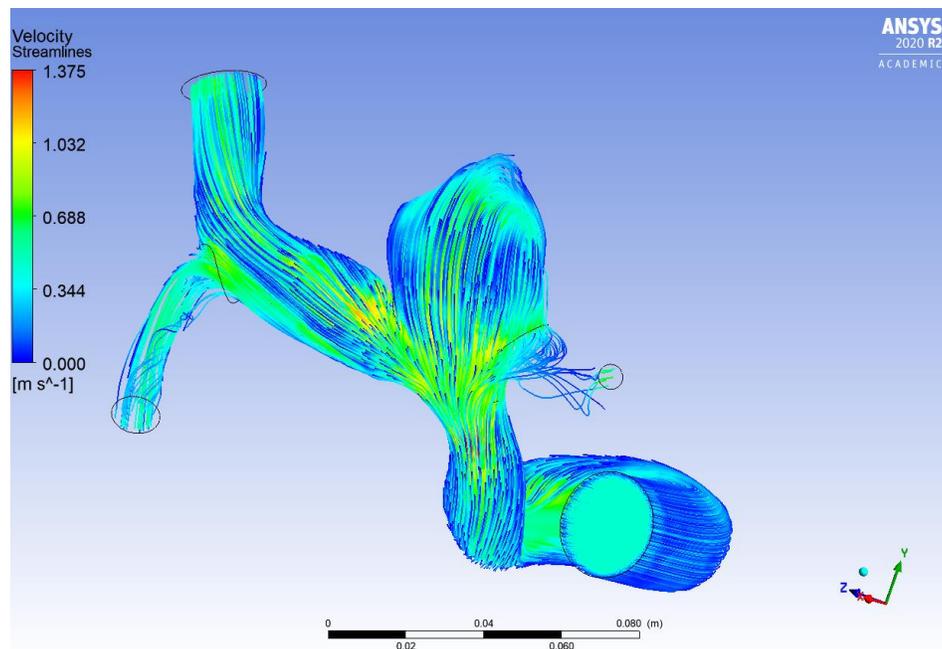


Figura 32. Líneas de corriente la arteria N°7 para $t=0.687$ s.

4.5 Resultados para la arteria N°28 caso impermanente

Se presentan imágenes para distintos tiempos del comportamiento de la presión, esfuerzo de corte y líneas de corriente para la arteria N°28 en régimen impermanente.

4.5.1 Presiones en las paredes para arteria N°28, caso impermanente

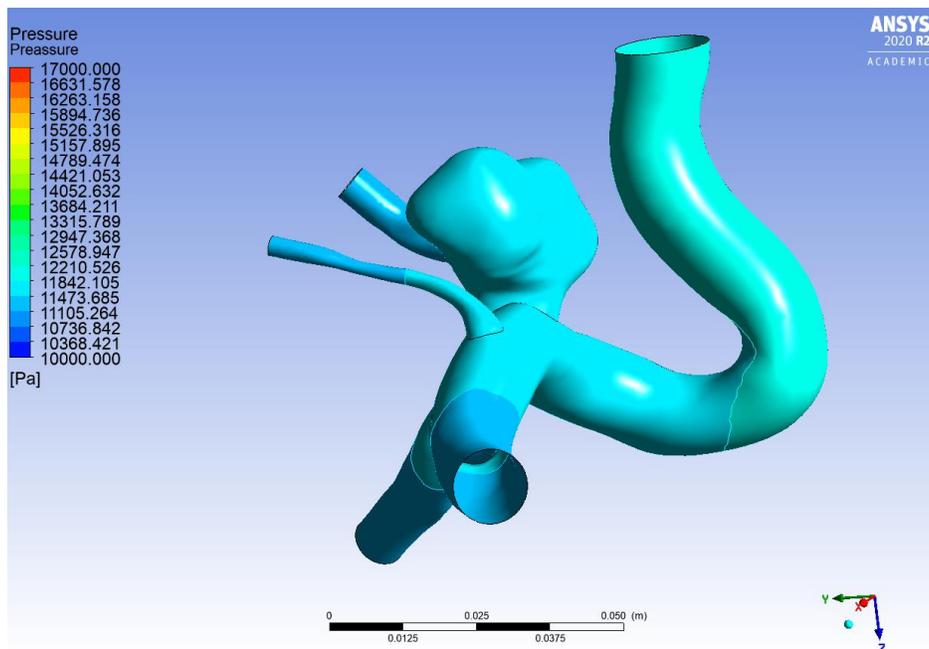


Figura 33. Presión en las paredes de la arteria N°28 para $t=0.408$ s.

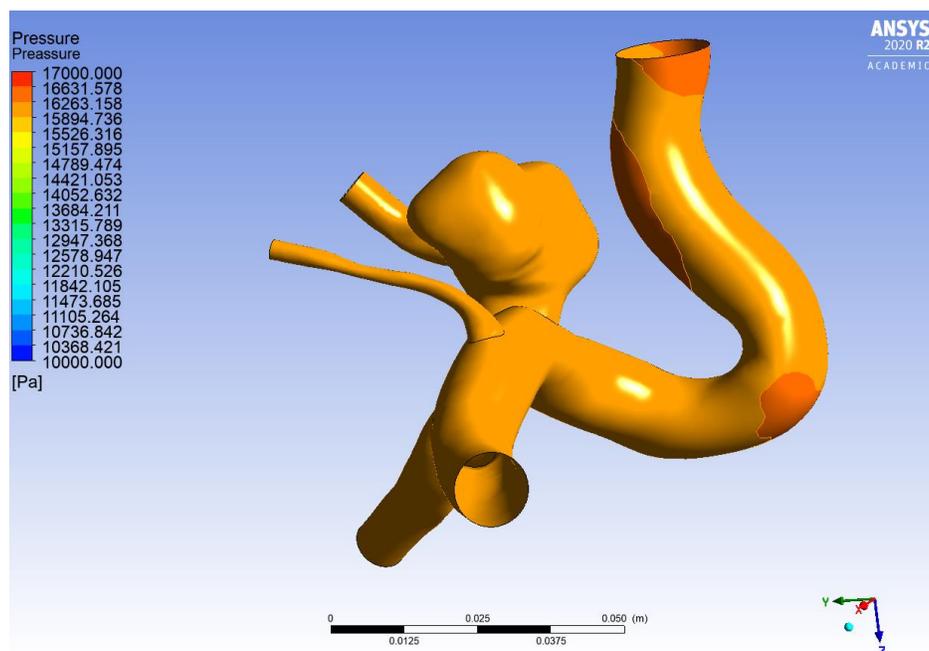


Figura 34. Presión en las paredes de la arteria N°28 para $t=0.795$ s.

4.5.2 Esfuerzo de corte en la pared para arteria N°28, caso impermanente

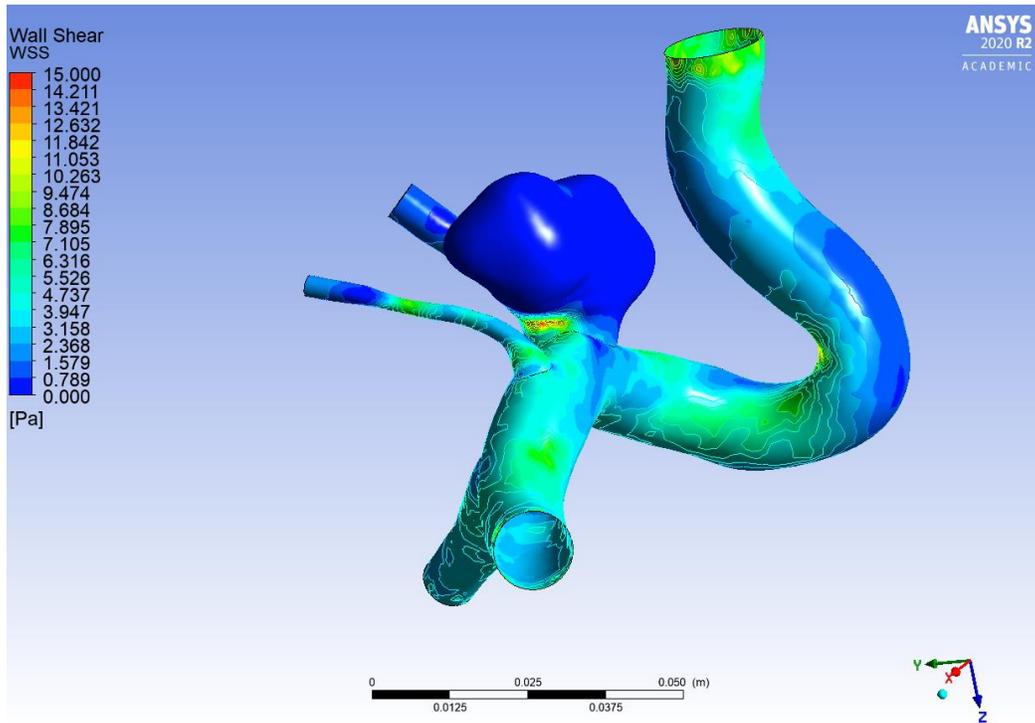


Figura 35. Esfuerzo de corte en las paredes de la arteria N°28 para $t=0.45$ s.

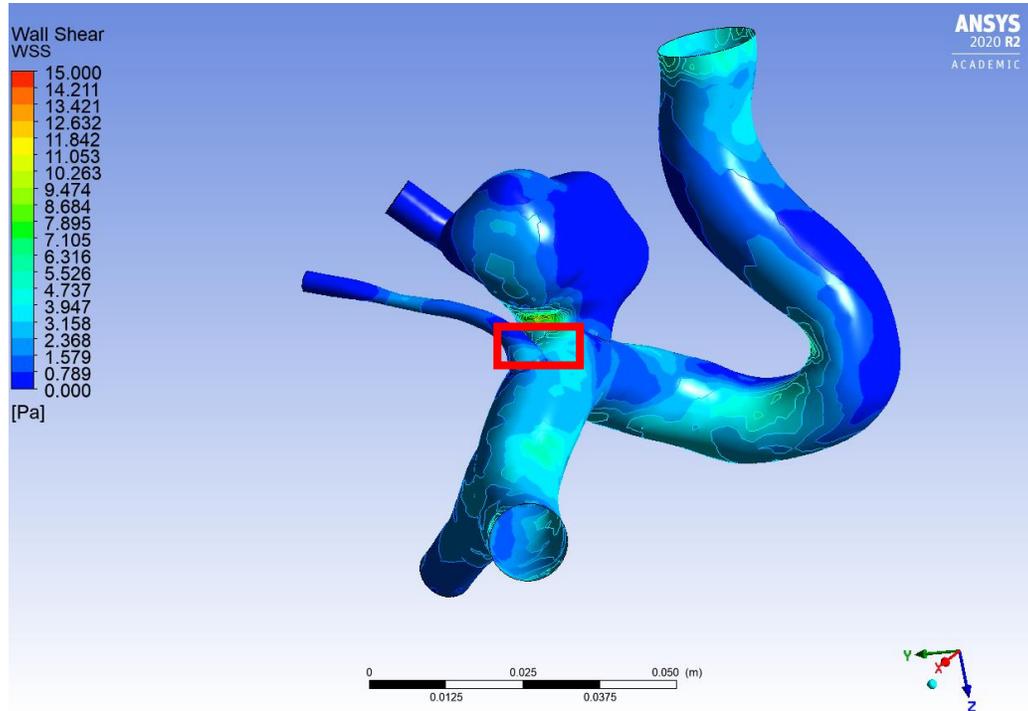


Figura 36. Esfuerzo de corte en las paredes de la arteria N°28 para $t=0.75$ s.

4.5.3 Líneas de corriente para arteria N°28, caso impermanente

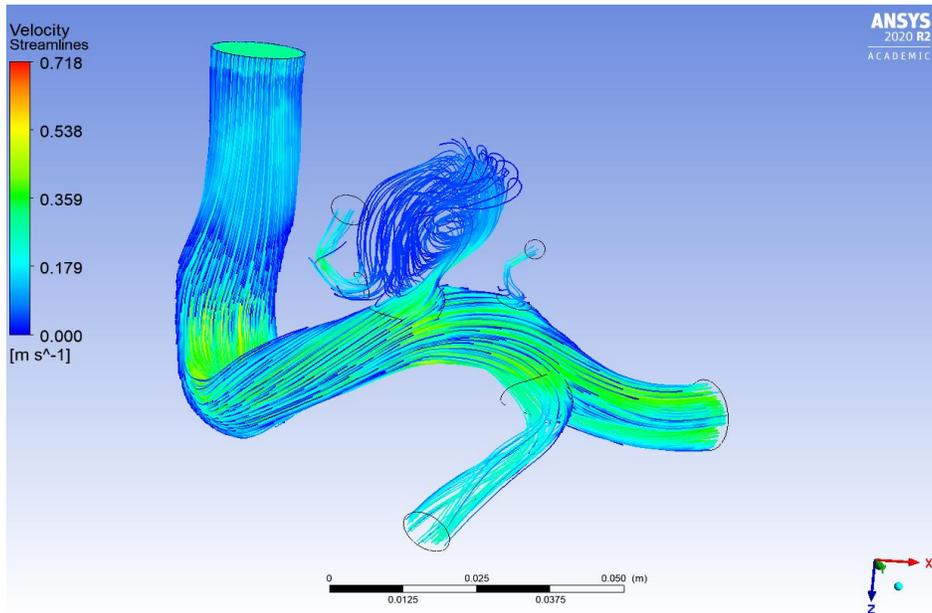


Figura 37. Líneas de corriente la arteria N°28 para t=0.387 s.

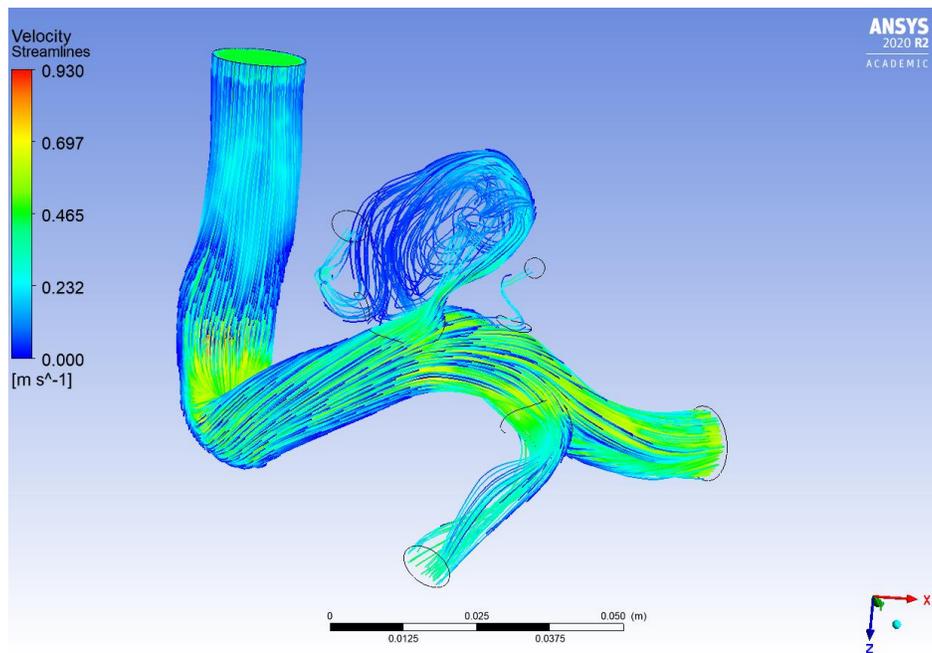


Figura 38. Líneas de corriente la arteria N°28 para t=0.567 s.

5. Discusión

5.1 Arteria N°7 caso permanente

Los resultados del comportamiento de la presión muestran que los valores de esta se encuentran en el rango esperable de 11000 a 16000 Pa (Amigo, 2018) para la arteria carótida interna.

Es posible observar en las Figs. 13 y 14 un comportamiento similar al de una tubería donde se produce una reducción en el valor de la presión en la dirección de avance del flujo, esto es claro en el tramo antes de la bifurcación y el aneurisma. Cambios en la dirección y magnitud de la velocidad (por efecto de cambios bruscos en la dirección del flujo y también cambios de sección) se traducen en cambios notorios en la presión. Esto se resalta en la Fig. 14, indicando dos zonas donde se tienen los mínimos valores de presión observados (del orden de los 12000 Pa) debido a cambios en sección del flujo y su dirección ya que ambos corresponden a bifurcaciones.

Como se mencionó anteriormente los máximos valores de presión se producen al inicio del flujo debido a la dirección de este (del orden de los 14300 Pa), pero existe otro punto de interés en el aneurisma donde se observa un aumento de la presión en la parte superior (Fig.14) de este.

Si bien en gran parte de la arteria y en el aneurisma se tienen valores para el esfuerzo de corte en la pared entre 0.1 y 6 Pa, existen zonas donde se alcanzan valores muy superiores los cuales indican zonas de alto riesgo, ya que tanto valores muy pequeños del esfuerzo de corte como muy altos tienen efectos negativos (el primero facilita la deposición, el segundo daña el tejido). En la Fig.16 se marcan secciones donde se observan valores elevados del esfuerzo de corte, estos están ligados a la ubicación del aneurisma y la bifurcación del flujo en esa región, por lo que esas zonas son de alto riesgo debido al desgaste que están sufriendo las paredes debido a los altos valores del esfuerzo de corte.

Los resultados para la velocidad muestran que esta va desde valores nulos (paredes) hasta 1.8 m/s, lo que se encuentra dentro de los rangos observados para la arteria (Caro et. al, 1974).

Las zonas de máxima velocidad se observan en las bifurcaciones y estrechamientos antes y después del aneurisma, como se muestra en las Figs 17, 18 y 19. Estas se relacionan con los puntos de baja presión presentados en la parte anterior respecto a la presión en las paredes.

El aneurisma presenta un vórtice en su interior (Fig.19) con velocidades del orden de 0.8 m/s, el cual recibe parte del flujo que proviene de la arteria principal el que circula al interior del aneurisma para ser luego expulsado a los conductos laterales, esto se traduce en zonas de flujo un poco más caótico en las bifurcaciones laterales y con curvatura, lo que se relaciona con las zonas donde se aprecian valores elevados del esfuerzo de corte en las paredes.

5.2 Arteria N°28 caso permanente

Los valores para la presión mostrados en las Figs. 20 y 21, indican que la presión se encuentra en el rango esperable para la arteria (entre 11000 y 16000 Pa), observándose la misma situación que en la arteria N°7 donde hay una reducción de la presión a lo largo del flujo a grandes rasgos, como ocurre en las tuberías.

De igual forma que en el caso de la arteria N°7, cambios en la dirección y magnitud de la velocidad por efecto de cambios bruscos en la dirección del flujo y también cambios de sección, se traducen en cambios notorios en la presión. Esto se observa en las Figs. 20 y 21, indicando zonas donde se tienen los máximos y mínimos valores de presión observados (del orden de los 13600 Pa y 12000 Pa, respectivamente) debido a cambios en sección del flujo y su dirección ya que ambos corresponden a bifurcaciones.

En el caso del aneurisma para la arteria N°28, la presión no presenta fluctuaciones grandes sobre este, en particular no existe un punto donde sea notorio el aumento de la presión. Esto se debe, posiblemente, a la forma del aneurisma y geometría de las arterias.

Al igual que el caso anterior gran parte de la arteria y en el aneurisma se tienen valores para el esfuerzo de corte en la pared entre 0.1 y 6 Pa, sin embargo, existen zonas donde se alcanzan valores muy superiores y corresponden a zonas de riesgo, En la Fig.23 se indican dos zonas donde se tienen valores altos para el esfuerzo de corte, en particular la que se encuentra al interior del aneurisma presenta un valor superior a los 20 Pa lo que es de alto riesgo debido a la diferencia con los valores en el resto de la arteria, además de ser un valor muy superior a lo que se tiene normalmente en las arterias.

Los resultados para la velocidad y líneas de corriente muestran que esta va desde valores nulos (paredes) hasta 1.2 m/s, lo que se encuentra dentro de los rangos observados para la arteria (Caro et. al, 1974).

Las zonas de máxima velocidad se observan en las bifurcaciones y en el cambio brusco de la arteria principal antes de llegar a la bifurcación y el aneurisma, como se muestra en las Figs. 24 y 25. Estos cambios en la velocidad se relacionan directamente con los puntos identificados para los valores extremos de presión.

El aneurisma presenta vórtices en su interior (Fig.26), con una velocidad menor a la observada en la arteria N°7, ya que las velocidades son menores a 0.5 m/s. A diferencia de la arteria N°7, que se observa un vórtice bien definido al interior del aneurisma, en el caso de la arteria N°28 se observa más de uno.

5.3 Arteria N°7 caso impermanente

Los valores de la presión para la arteria en la oscilación van desde los 10000 a los 16000 Pa, valores que se encuentran en el rango de la presión observada en una arteria.

Los resultados de la solución numérica para el caso impermanente permiten identificar ciertas regiones de la arteria y aneurisma donde se presentan los mayores valores de presión en la

oscilación cardiaca. Es esperable que la arteria principal tenga valores elevados cuando se produce el máximo de presión en el sistema dado por la condición de borde.

Los valores del esfuerzo de corte en la pared de la arteria durante la oscilación van desde los 0 a los 60 Pa, donde se corrobora la situación observada en el caso estacionario, existen zonas de la pared en la bifurcación de la arteria y el aneurisma que están sometidas valores grandes para el esfuerzo de corte los que pueden resultar ser nocivos debido a que alcanzan magnitudes superiores a los 40 Pa para tiempos posteriores al máximo de velocidad en la entrada de la arteria. Se observa también un aumento del esfuerzo de corte en la protuberancia superior del aneurisma, misma zona donde se observan valores altos de la presión hacia el final de la oscilación. En el resto de la arteria los valores del esfuerzo de corte en la pared se mantienen bajo los 6 Pa.

Las velocidades observadas están el rango de 0 a 1.4 m/s, lo que es lo esperable para la arteria, considerando los estrechamientos, cambios de dirección y sección.

Los resultados mostrados en las Figs. 31 y 32 muestran un aumento de la magnitud de la velocidad en toda la arteria acorde al aumento que se produce en la velocidad de entrada. Como en el caso estacionario se empleó la velocidad máxima de velocidad en la oscilación cardiaca, se observan los mismos resultados para el tiempo que se produce este máximo, observándose los máximos de velocidad en los mismos puntos (estrechamiento antes del aneurisma, bifurcaciones después del aneurisma). El aumento de la velocidad en la entrada también provoca un aumento de la velocidad que se tienen en el vórtice al interior del aneurisma, similar al valor determinado en el régimen permanente, el que mantiene su estructura a pesar de las fluctuaciones de velocidad durante un ciclo cardiaco.

5.4 Arteria N°28 caso impermanente

Los valores de la presión para la arteria durante la oscilación van desde los 10000 a los 16000 Pa, valores que se encuentran en el rango de la presión observada en una arteria (Amigo, 2018).

Los resultados de la solución numérica para el caso impermanente muestran las mismas zonas donde se tienen los valores máximos y mínimos observados para el caso permanente, se mantienen para el caso impermanente, solo que estos máximos y mínimos son relativos al resto de la arteria para el caso transiente, es decir al variar la presión en el sistema debido a la oscilación estos siguen un comportamiento similar.

De igual forma se observa que los valores máximos se tienen después de que se produce el máximo de presión en la oscilación cardiaca. Los puntos donde se observan los máximos y mínimos siguen siendo puntos donde se producen cambios de bruscos en la dirección del flujo como las bifurcaciones o curvas en la arteria principal, al igual que cambios en la magnitud de la velocidad causada por ejemplo por los estrechamientos, resultado que ya se había observado en el caso estacionario.

Se observan valores bajos para el esfuerzo de corte en las paredes en gran parte de la arteria del orden de los 0.1 a 6 Pa, mismo resultado que se tiene para el análisis estacionario.

Sin embargo, existen zonas que presentan valores muy elevados para los esfuerzos de corte, que ya se habían identificado en la resolución permanente, estas son notorias una vez que se produce el máximo de velocidad en la oscilación. El caso impermanente permite determinar que los valores máximos del esfuerzo de corte se alcanzan cuando se tiene la máxima velocidad de entrada durante la oscilación.

Las velocidades resultantes se encuentran en el rango de 0 a 1 m/s, lo que es lo esperable para la arteria, considerando los estrechamientos, cambios de dirección y sección.

Al igual que en el caso de la arteria N°7, se tiene un aumento de la magnitud de la velocidad en toda la arteria acorde al aumento que se produce en la velocidad de entrada.

Se observa que los valores máximos de velocidad se producen en los mismos lugares que se identificaron en el caso estacionario. Algo que no es posible observar en el régimen permanente es cómo evolucionan los vórtices al interior del aneurisma debido a que la oscilación de la velocidad de entrada debido al cambio en el tiempo. Por estas mismas variaciones, las velocidades al interior del aneurisma también cambian, teniéndose valores muy bajos cuando la velocidad de entrada es pequeña, antes del máximo en la velocidad de entrada las velocidades al interior del aneurisma son inferiores a los 0.2 m/s, al igual que no se observa con detalle más de un vórtice como ocurre en el caso estacionario debido a la baja velocidad. Una vez que aumenta la velocidad de entrada se recupera el resultado de la solución estacionaria para el máximo de velocidad.

6. CONCLUSIONES

Los resultados de las simulaciones numéricas obtenidos muestran valores de velocidad, presión y esfuerzo de corte esperables para las arterias analizadas. Resolver el caso estacionario con valores adecuados, como por ejemplo la velocidad máxima de entrada y una presión adecuada para la arteria permitió identificar las zonas donde se tienen valores máximos y mínimos para la velocidad, presión y esfuerzo de corte, además del comportamiento de los vórtices en el aneurisma considerando solo el régimen permanente.

Por lo anterior, es valioso abordar este tipo de problemas primeramente como un problema permanente con valores adecuados para tener una primera aproximación de lo que ocurre en la arteria y aneurisma. La resolución impermanente permite expandir sobre lo que ya se conoce de la solución permanente.

La ventaja de una solución permanente preliminar es que permite enfocarse en las variaciones espaciales que ocurren en el problema, ya que analizar simultáneamente variaciones espaciales y temporales es más complejo y puede llevar a que se pasen por alto detalles importantes del comportamiento de la solución.

Se observa que al agregar las pulsaciones (solución impermanente), además de reiterar los puntos críticos identificados, muestra un desfase en términos de la respuesta a la pulsación de presión y velocidad, por lo que los valores máximos de presión, esfuerzo de corte y

velocidad para toda la arteria no se alcanzan al mismo tiempo que se produce el máximo de presión y velocidad en los bordes. La solución impermanente permite, además, identificar variaciones en los vórtices al interior de los aneurismas.

Si bien las soluciones muestran resultados dentro de los rangos esperados, existe una serie de simplificaciones que se hicieron que puedan limitar la validez al análisis. Entre estas simplificaciones están considerar la arteria formada por una pared rígida, usar una distribución uniforme de velocidad e igual a la máxima como condición de borde en la entrada. Ambas simplificaciones, sin embargo, pueden ser subsanadas en otros estudios, incorporando el comportamiento elástico de la arteria y extendiendo hacia aguas arriba la arteria, de tal manera de tener una longitud de entrada que permita lograr un flujo plenamente desarrollado, o considerar en la entrada la distribución radial de velocidad de Womersley (1955).

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el profesor Álvaro Valencia del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Chile por facilitar los CAD de las dos arterias analizadas y sus comentarios y correcciones. El autor agradece también el programa de becas de doctorado ANID, beca Doctorado Nacional 2022-21221030, por el financiamiento recibido para sus estudios en el programa de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, Mención Fluidodinámica, de la Universidad de Chile.

REFERENCIAS

- Amigo Ahumada, N. R. (2018). *Caracterización morfológica y estudio de la hemodinámica de aneurismas cerebrales humanos mediante simulaciones computacionales*. Tesis para optar el título de doctor en ciencias de la ingeniería, mención fluidodinámica, Universidad de Chile.
- Britannica, T. Editors of Encyclopaedia (2022). Jean-Louis-Marie Poiseuille. *Encyclopedia Britannica*. <https://www.britannica.com/biography/Jean-Louis-Marie-Poiseuille> Accessed 14 September 2022.
- Cho, Y. I., & Kensey, K. R. (1991). Effects of the non-Newtonian viscosity of blood on flows in a diseased arterial vessel. Part 1: Steady flows. *Biorheology*, 28(3-4), 241-262.
- Daly, B. J. (1976). A numerical study of pulsatile flow through stenosed canine femoral arteries. *Journal of Biomechanics*, 9(7), 465-475.
- Cebral, J. R., Putman, C. M., Alley, M. T., Hope, T., Bammer, R., & Calamante, F. (2009). Hemodynamics in normal cerebral arteries: qualitative comparison of 4D phase-contrast magnetic resonance and image-based computational fluid dynamics. *Journal of Engineering Mathematics*, 64(4), 367.
- Gómez López, F. A. (2010). *Estudio Numérico de la Turbulencia en Aneurismas Cerebrales*. Memoria para optar al Título de Ingeniero Civil Mecánico, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Chile.
- Johnston, B. M., Johnston, P. R., Corney, S., & Kilpatrick, D. (2004). Non-Newtonian blood flow in human right coronary arteries: steady state simulations. *Journal of Biomechanics*, 37(5), 709-720.

- O'Callaghan, S., Walsh, M., & McGloughlin, T. (2006). Numerical modelling of Newtonian and non-Newtonian representation of blood in a distal end-to-side vascular bypass graft anastomosis. *Medical Engineering & Physics*, 28(1), 70-74.
- Lambossy, P. Oscillations forcees d'un liquide incompressible et visqueux dans un tube rigide et horizontal. Calcul de la force de frottement. *Helv. Physica Acta* 1952, 25, 371–386.
- Moradicheghamahi, J., Sadeghiseraji, J., & Jahangiri, M. (2019). Numerical solution of the Pulsatile, non-Newtonian and turbulent blood flow in a patient specific elastic carotid artery. *International Journal of Mechanical Sciences*, 150, 393-403.
- Nader, E., Skinner, S., Romana, M., Fort, R., Lemonne, N., Guillot, N., ... & Stauffer, E. (2019). Blood rheology: Key parameters, impact on blood flow, role in sickle cell disease and effects of exercise. *Frontiers in Physiology*, 10, 1329.
- Nakamura, M., & Sawada, T. (1988). Numerical study on the flow of a non-Newtonian fluid through an axisymmetric stenosis. *J. Biomech. Eng.* 110(2): 137-143.
- Navier, C. L. M. H. (1823) "Memoire sur les lois du mouvement des fluides", *Mem. Acad. R. Sci. Paris*, Vol. 6, pp. 389-416. (Leído en la l'Académie royale des Sciences el 18 de marzo de 1822).
- Pontrelli, G. (1998). Pulsatile blood flow in a pipe. *Computers & fluids*, 27(3), 367-380.
- Sextl, T.; Ueber den von, E.G. Richardson entdeckten Annulareffect. *Zeitschrift für Physik* 1930, 61, 349–362.
- Stokes, G.G., (1845). On the theories of the internal friction of fluids in motions, and the equilibrium and motion of elastic solids. *Transaction of the Cambridge Philosophical Society*, 8: pp. 75-129.
- Valencia, A., Figueroa, H., Rivera, R., & Bravo, E. (2010). Análisis de sensibilidad en simulaciones fluidodinámicas de aneurismas cerebrales incluyendo interacción fluido estructura. *Información Tecnológica*, 21(5), 27-38.
- Womersley, J. R. (1955). Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *The Journal of Physiology*, 127(3), 553.

ACERCA DEL AUTOR

Rodrigo González es Ingeniero Civil, mención Hidráulica, Sanitaria y Ambiental y Magister en Ciencias de la Ingeniería, mención Recursos Hídricos y Medio Ambiente, ambos por la Universidad de Chile. En la actualidad es alumno del Programa de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, mención Fluidodinámica en la misma Universidad. Sus áreas de interés se centran en soluciones analíticas y aproximaciones por perturbaciones para flujos de fluidos tanto newtonianos como no newtonianos.

CAMPO DE VELOCIDADES INDUCIDO POR LA DEFORMACIÓN DEL FONDO EN UN FLUIDO CON SUPERFICIE LIBRE

RODRIGO GONZÁLEZ¹, ALDO TAMBURRINO²

¹Alumno Programa de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería mención Fluidodinámica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

rodrigojgonzalez@hotmai.com

ORCID: 0000-0002-0253-2129

²Profesor Asociado, Departamento de Ingeniería Civil, Investigador Asociado, Advanced Mining Technology Center, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

atamburr@ing.uchile.cl

ORCID: 0000-0001-5406-370X

RESUMEN

Como una forma de conmemorar los 200 años desde que Claude-Louis Navier presentó en la Academia Real de Ciencias de París sus ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos, los autores de este artículo, mediante el método de las perturbaciones, resuelven analíticamente las ecuaciones de Navier-Stokes para determinar las velocidades transversales y la altura del flujo laminar de un escurrimiento con superficie libre, cuyo fondo varía en el tiempo con una forma ondulada, desde una condición de lecho plano hasta alcanzar asintóticamente una amplitud máxima. Los resultados indican que la velocidad normal al fondo está en fase con la deformación del fondo, mientras que la velocidad transversal está desfasada en $\pi/2$. La amplitud de la deformación de la superficie libre es menor que la del fondo y está en fase con este.

Palabras claves: Navier-Stokes, solución analítica, método de perturbaciones, flujo laminar.

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO

Es posible encontrar soluciones analíticas de las ecuaciones de Navier-Stokes para algunas condiciones particulares de flujo desde los trabajos seminales de Navier y Stokes. Es así como en su artículo leído en 1822 y publicado en 1823, Navier determina la distribución de velocidades del flujo permanente con superficie libre en un canal rectangular (Navier, 1823). Stokes, en su estudio relativo al movimiento de péndulos, resuelve “el extremadamente simple caso de un plano oscilatorio” (Stokes, 1851, p. 20). En una nota del mismo estudio, Stokes soluciona el caso del movimiento súbito de una placa inicialmente en reposo (Stokes, 1851, Note B, p. 100). El problema del flujo laminar sobre un fondo ondulado ha sido abordado, por ejemplo, por Benjamin (1959), Wang (1981). El caso en el

que el fondo ondulado permanece fijo, pero es el flujo el que oscila ha sido tratado por Lyne (1971), Kaneko y Honji (1979) y Vittori (1989), entre otros. En estos artículos, la ondulación del lecho es perpendicular a la dirección del flujo principal (Fig. 1).

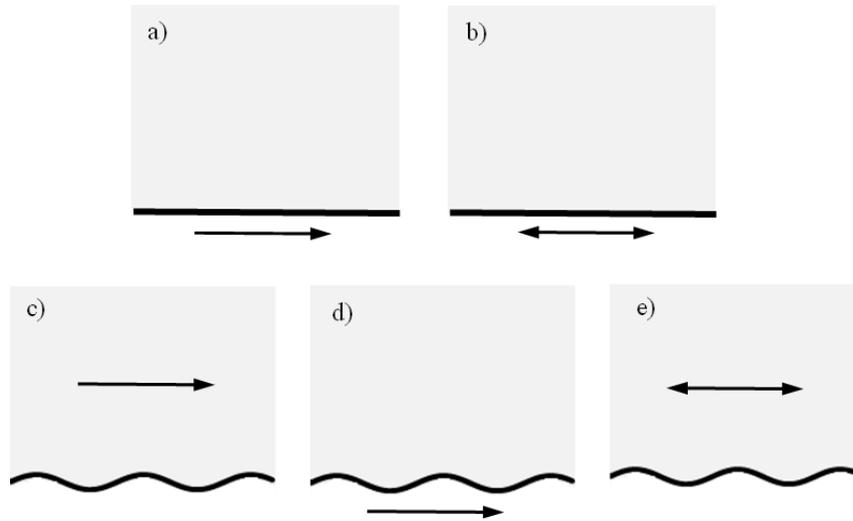


Figura 1. Configuraciones estudiadas: a) Flujo inducido por el movimiento impulsivo de una placa plana (Stokes, 1851), b) Flujo inducido por el movimiento oscilatorio de una placa plana (Stokes, 1851), c) Flujo sobre un fondo ondulado fijo (Benjamin, 1959; Wang, 1981); d) Flujo inducido por el movimiento de un fondo ondulado (Benjamin, 1959); e) Flujo oscilatorio sobre un fondo ondulado (Lyne, 1971; Kaneko y Honji, 1979); Vittori, 1989).

El objetivo del presente artículo es determinar las características de un flujo con superficie libre cuando el fondo se deforma armónicamente de manera asintótica en el tiempo desde una condición inicial plana hasta una amplitud máxima. El flujo principal se considera uniforme, con la componente principal de la velocidad en la dirección de la ondulación, como se muestra en la Fig. 2. Se determinan las componentes de la velocidad en el plano normal al flujo principal y la deformación de la superficie libre.

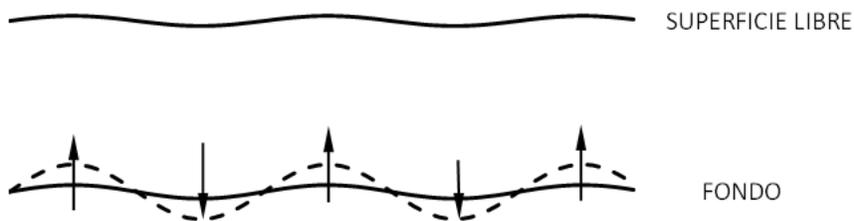


Figura 2. Configuración estudiada en este trabajo. Determinación del campo de velocidades ante una deformación vertical del lecho. El flujo principal es perpendicular a la hoja.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

2.1 Ecuaciones que rigen el flujo

El problema por estudiar consiste en determinar las componentes transversales de velocidad del flujo laminar con superficie libre cuando éste se desarrolla sobre un fondo inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal. El fondo tiene una ondulación de pequeña amplitud en la dirección transversal al flujo y se deforma en el tiempo. Si a es la amplitud de la ondulación y h la profundidad del flujo, esta condición se describe como $a/h \ll 1$. La longitud de la ondulación es λ , y también se cumple que $a \ll \lambda$. Un esquema del problema se presenta en la Fig. 3. El flujo se extiende indefinidamente en las direcciones x e y . Las ecuaciones que rigen el flujo corresponden a las de continuidad y de Navier-Stokes:

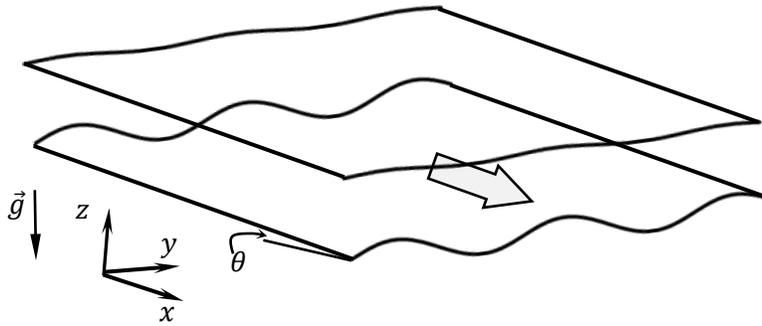


Figura 3. Esquema del problema estudiado

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g \sin \theta \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \rho g \cos \theta \quad (4)$$

En las ecuaciones anteriores (u, v, w) son las componentes de la velocidad según (x, y, z) , t es el tiempo, p es la presión, g es la aceleración de gravedad y ρ la densidad del fluido. El origen del eje z se ubica en el plano medio que define el fondo y es perpendicular a este

plano. El eje x se orienta en la dirección del flujo principal y forma un ángulo θ con la horizontal.

2.2 Condiciones de borde

Las condiciones de borde que deben aplicarse son cinemáticas en el fondo y en la superficie libre, además de una condición de borde dinámica en la superficie libre, las que se indican a continuación.

En el fondo se tienen las condiciones de no deslizamiento para las componentes u y v :

$$z = 0, \forall(x, y, t) \quad : \quad u = v = 0 \quad (5)$$

Denominado η la cota del fondo en las coordenadas (x, y) para el tiempo t , la componente w de la velocidad se relaciona con la deformación del lecho:

$$\forall \eta(x, y, t) \quad : \quad w = \frac{d\eta}{dt} \quad (6)$$

Si h es la altura de escurrimiento en las coordenadas (x, y) para el tiempo t , medida desde el fondo en la dirección de z , en ausencia de viento la condición dinámica en la superficie libre es

$$z = h, \forall(x, y, t) \quad : \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (7)$$

La condición de borde cinemática permite determinar la deformación de la superficie libre:

$$z = h, \forall(x, y, t) \quad : \quad w = \frac{dh}{dt} \quad (8)$$

De este modo, el sistema de Ecs. 1-4 y las condiciones de borde 5-8, permiten resolver el problema planteado.

3. SOLUCIÓN

3.1 Campo de velocidades transversales

El problema se resolverá por el método de las perturbaciones en torno a un flujo base (Nayfeh, 2004; Shivamoggi, 2003). La condición sin perturbar (flujo base) se denota con el subíndice 0 y las perturbaciones con el subíndice 1. El flujo base está definido por las velocidades $(u_0, 0, 0)$, de tal manera que las velocidades están dadas por

$$(u, v, w) = (u_0 + \varepsilon u_1, \varepsilon v_1, \varepsilon w_1) \quad (9)$$

donde $\varepsilon = a/h_0 \ll 1$ y el resto de las componentes de la velocidad (debidamente escaladas) son de orden 1. Del mismo modo, la altura del escurrimiento h está dada por

$$h = h_0 + \delta h_1 \quad (10)$$

siendo $\delta \ll 1$ un parámetro a determinar. La posición η del lecho está dada por

$$\eta = \eta_R - x \sin \theta + a f_\eta e^{iky} \quad (11)$$

donde η_R es un nivel arbitrario de referencia, a es la amplitud de la perturbación, f_η es una función del tiempo que describe la deformación del lecho, $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda de la deformación lateral del lecho e $i = \sqrt{-1}$. Para simplificar el álgebra se utiliza la fórmula de Euler, entendiéndose que debe tomarse la parte real de los resultados.

Reemplazando las velocidades dadas por la Ec. 9 en el sistema de ecuaciones (1) a (4), se obtiene la solución para el flujo base:

$$(u_0, v_0, w_0) = \left(\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} h_0^2 \left(\frac{z}{h_0} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{h_0^2} \right), 0, 0 \right) \quad (12)$$

$$p = \rho g \cos \theta (h_0 - z) \quad (13)$$

Las ecuaciones de continuidad y momentum para las perturbaciones son:

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right) \quad (16)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right) \quad (17)$$

Las perturbaciones de la velocidad v_1 y w_1 satisfacen la ecuación de continuidad en el plano (y, z) , por lo que es factible buscar la solución en términos de una función de corriente ψ_1 :

$$v_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \quad , \quad w_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \quad (18)$$

Expresando la Ec. 16 o 17 en términos de la función de corriente se obtiene la solución para ψ_1 . Usando la ecuación de momentum según y:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) \right) \quad (19)$$

Se propone una solución de la forma

$$\psi_1 = f \Phi e^{iky} \quad (20)$$

donde f y Φ son funciones de t y z , respectivamente, las que deben determinarse. Reemplazando la Ec. 20 en Ec. 19, se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria para f :

$$\frac{\rho}{\mu} e^{iky} \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \left(-fk^2 e^{iky} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + f e^{iky} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} \right) \quad (21)$$

La ecuación anterior es de variables separables. Reordenando términos:

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{-k^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}} = \zeta \quad (22)$$

De donde se obtiene fácilmente que la variación temporal de la función de corriente está dada por

$$f = K_1 e^{\frac{\mu}{\rho} \zeta t} \quad (23)$$

La variación de ψ según z está definida a partir de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} - (\zeta + k^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (24)$$

El término ζ de las ecuaciones anteriores no es conocido y será determinado en el transcurso de la solución. Llamando $\omega = \sqrt{\zeta + k^2}$, la solución de la ecuación diferencial anterior es

$$\Phi = A \sinh(\omega z) + B \cosh(\omega z) + C \quad (25)$$

A, B y C son constantes de integración. De este modo, la función de corriente queda:

$$\psi_1 = K_1 e^{\frac{\mu}{\rho} \zeta t} [A \sinh(\omega z) + B \cosh(\omega z) + C] e^{iky} \quad (26)$$

Las cuatro constantes de integración que existen en la Ec. 26 se reducen a tres al definir $\bar{A} = K_1 A$, $\bar{B} = K_1 B$ y $\bar{C} = K_1 C$, quedando:

$$\psi_1 = e^{\frac{\mu}{\rho} \zeta t} [\bar{A} \sinh(\omega z) + \bar{B} \cosh(\omega z) + \bar{C}] e^{iky} \quad (27)$$

Conocida la función de corriente, se obtiene las componentes v_1 y w_1 de la velocidad:

$$v_1 = \omega e^{\frac{\mu}{\rho} \zeta t} [\bar{A} \cosh(\omega z) + \bar{B} \sinh(\omega z)] e^{iky} \quad (28)$$

$$w_1 = -ike^{\frac{\mu}{\rho} \zeta t} [\bar{A} \sinh(\omega z) + \bar{B} \cosh(\omega z) + \bar{C}] e^{iky} \quad (29)$$

Las constantes se determinan de las condiciones de borde, las que corresponden a dos condiciones cinemáticas en el fondo y una condición dinámica en la superficie libre. Para v_1 se impone la condición de no deslizamiento en el fondo. Como la deformación del lecho se ha supuesto pequeña, la condición $v_1 = 0$ puede aplicarse entonces en $z = 0$, con lo que la Ec. 28 arroja:

$$\bar{A} = 0 \quad (30)$$

Quedando

$$v_1 = \omega e^{\frac{\mu}{\rho} \zeta t} \bar{B} \sinh(\omega z) e^{iky} \quad (31)$$

$$w_1 = -ike^{\frac{\mu}{\rho} \zeta t} [\bar{B} \cosh(\omega z) + \bar{C}] e^{iky} \quad (32)$$

Considerando que la amplitud de la deformación de la superficie libre es mucho menor que su longitud de onda ($a \ll \lambda$), el radio de curvatura de la superficie es muy grande, por lo que el efecto de la tensión superficial puede despreciarse y la condición dinámica puede aplicarse en $z = h_0$. Como se indicó en la sección 2.2, en ausencia de viento, se tiene que en $z = h_0$ el esfuerzo de corte es nulo. Reemplazando la Ec. 9 en la expresión para el esfuerzo de corte $\tau_{yz} = \mu(\partial v / \partial z + \partial w / \partial y)$, puede escribirse $\tau_{yz} = \tau_{yz0} + \varepsilon \tau_{yz1}$. Utilizando las Ecs. 31 y 32, el esfuerzo de corte asociado a la perturbación es:

$$\tau_{yz1} = \mu e^{\frac{\mu}{\rho} \zeta t} [(\omega^2 + k^2) \bar{B} \cosh(\omega z) + k^2 \bar{C}] e^{iky} \quad (33)$$

Imponiendo que en $z = h_0$ se tiene $\tau_{yz1} = 0$, resulta

$$\bar{B} = \frac{-k^2 \bar{C}}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h_0)} \quad (34)$$

De este modo, la función de corriente y las componentes de la velocidad asociadas a la perturbación quedan:

$$\psi_1 = e^{\frac{\mu}{\rho}\zeta t} \bar{C} \left[\frac{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2 \cosh(\omega z)}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h)} \right] e^{iky} \quad (35)$$

$$v_1 = -\omega e^{\frac{\mu}{\rho}\zeta t} \bar{C} \left[\frac{k^2}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h)} \sinh(\omega z) \right] e^{iky} \quad (36)$$

$$w_1 = -ike^{\frac{\mu}{\rho}\zeta t} \bar{C} \left[\frac{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2 \cosh(\omega z)}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h)} \right] e^{iky} \quad (37)$$

La segunda condición dinámica en el fondo, junto a la forma en que este se deforma en el tiempo permiten obtener las constantes ζ y \bar{C} . En $z = 0$ se debe cumplir

$$w_1|_{z=0} = \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \quad (38)$$

La Ec. 11 puede escribirse como

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 \quad (39)$$

con $\eta_0 = \eta_R - x \sin \theta$ y η_1 dado por

$$\eta_1 = h_0 f_\eta e^{iky} \quad (40)$$

Dada la estructura impuesta para la variación en el tiempo de la función de corriente ($\psi_1 \sim e^{\frac{\mu}{\rho}\zeta t}$) la variación en el tiempo de la deformación del lecho no puede ser arbitraria. En particular, algunas de las formas que puede tomar la función f_η en la Ec. 40 son una dependencia exponencial del tiempo, o una constante más una dependencia exponencial. Para este artículo se elige la función

$$f_\eta = 1 - e^{\beta t} \quad , \quad \beta < 0 \quad (41)$$

La función anterior caracteriza a una deformación del lecho que crece desde cero hasta alcanzar una amplitud máxima de equilibrio igual a a . Se tiene entonces que

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = -h_0 \beta e^{\beta t} e^{iky} \quad (42)$$

con lo cual la segunda condición cinemática en el fondo queda

$$ike^{\frac{\mu}{\rho}\zeta t} \bar{C} \left[\frac{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h)} \right] = h_0 \beta e^{\beta t} \quad (43)$$

Para que en la Ec. 43 el lado derecho sea idéntico al lado izquierdo para todo tiempo, debe cumplirse:

$$\zeta = \beta \frac{\rho}{\mu} \quad (44)$$

$$\bar{C} = -i \frac{h_0 \beta}{k} \left[\frac{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h_0)}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h_0) - k^2} \right] \quad (45)$$

Luego, la función de corriente ψ_1 asociada a v_1 y w_1 es

$$\psi_1 = -i \frac{h_0 \beta}{k} e^{\beta t} \left[\frac{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2 \cosh(\omega z)}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2} \right] e^{iky} \quad (46)$$

Por construcción, la función de corriente está compuesta por una función base más una perturbación, al igual que las velocidades, el esfuerzo de corte y la deformación del lecho. De este modo, se puede escribir

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 \quad (47)$$

Como las velocidades base son nulas, resulta que la función de corriente es solo el resultado de las perturbaciones:

$$\psi = \frac{a}{h_0} \psi_1 \quad (48)$$

Lo mismo ocurre para las velocidades, como se explicita en la Ec.9. Por lo tanto, la función de corriente y las velocidades transversales al flujo principal están dadas por la parte real de las siguientes expresiones:

$$\psi = -i \frac{a\beta}{k} e^{\beta t} \left[\frac{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2 \cosh(\omega z)}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2} \right] e^{iky} \quad (49)$$

$$v = ia\beta e^{\beta t} \left[\frac{k\omega}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2} \sinh(\omega z) \right] e^{iky} \quad (50)$$

$$w = -a\beta e^{\beta t} \left[\frac{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2 \cosh(\omega z)}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2} \right] e^{iky} \quad (51)$$

3.2 Deformación de la superficie libre

Para determinar la deformación de la superficie libre se emplea la condición cinemática en $z = h$:

$$w|_{z=h} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (52)$$

Es decir, usando la Ec. 51:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -a\beta e^{\beta t} \left[\frac{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2 \cosh(\omega z)}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2} \right] e^{iky} \quad (53)$$

Por ser las deformaciones pequeñas, es lícito considerar $h = h_0$ en el lado derecho de la ecuación anterior al realizar la integración, resultando:

$$\int_{h_0}^h dh = -a\beta \left[\frac{\omega^2 \cosh(\omega h_0)}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h_0) - k^2} \right] e^{iky} \int_0^t e^{\beta t} dt \quad (54)$$

Resultando:

$$h = h_0 + a \left[\frac{\omega^2 \cosh(\omega h_0)}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h_0) - k^2} \right] (1 - e^{\beta t}) e^{iky} \quad (55)$$

Identificando los términos de las Ecs. 10 y 55 y usando la expresión de η_1 dada por la Ec. 40, se tiene que

$$\delta = \varepsilon \left[\frac{\omega^2 \cosh(\omega h_0)}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h_0) - k^2} \right] \quad (56)$$

Es fácil ver que

$$0 < \left[\frac{\omega^2 \cosh(\omega h_0)}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h_0) - k^2} \right] < 1 \quad (57)$$

de donde resulta que la deformación de la superficie libre es siempre menor que la del fondo. Además, las Ecs. 40 y 55 indican que ambas deformaciones están siempre en fase.

3.3 Visualización de los resultados

Con el objeto de visualizar los resultados obtenidos en la sección anterior, se presenta a continuación, para valores arbitrarios de los parámetros y variables involucradas, las líneas de corriente, velocidades, y deformación de la superficie libre, las que están dadas por la

parte real de las Ecs. 49, 50, 51 y 55 y que se presentan a continuación. Tener en cuenta que $\beta < 0$.

$$\psi = \frac{a\beta}{k} e^{\beta t} \left[\frac{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2 \cosh(\omega z)}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2} \right] \sin(ky) \quad (58)$$

$$v = -a\beta e^{\beta t} \left[\frac{k\omega}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2} \sinh(\omega z) \right] \sin(ky) \quad (59)$$

$$w = -a\beta e^{\beta t} \left[\frac{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2 \cosh(\omega z)}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h) - k^2} \right] \cos(ky) \quad (60)$$

$$h = h_0 + a \left[\frac{\omega^2 \cosh(\omega h_0)}{(\omega^2 + k^2) \cosh(\omega h_0) - k^2} \right] (1 - e^{\beta t}) \cos(ky) \quad (61)$$

Para un valor del tiempo $t > 0$, arbitrario, se presentan las líneas de corriente y las componentes v y w se presentan en las Figs. 4, 5 y 6, respectivamente, para un tramo en la dirección y igual a una longitud de onda λ de la deformación del fondo. En la Fig. 7 se presenta la deformación del tiempo y de la superficie libre para distintos instantes de tiempo. Detalles se presentan en la descripción de las figuras.

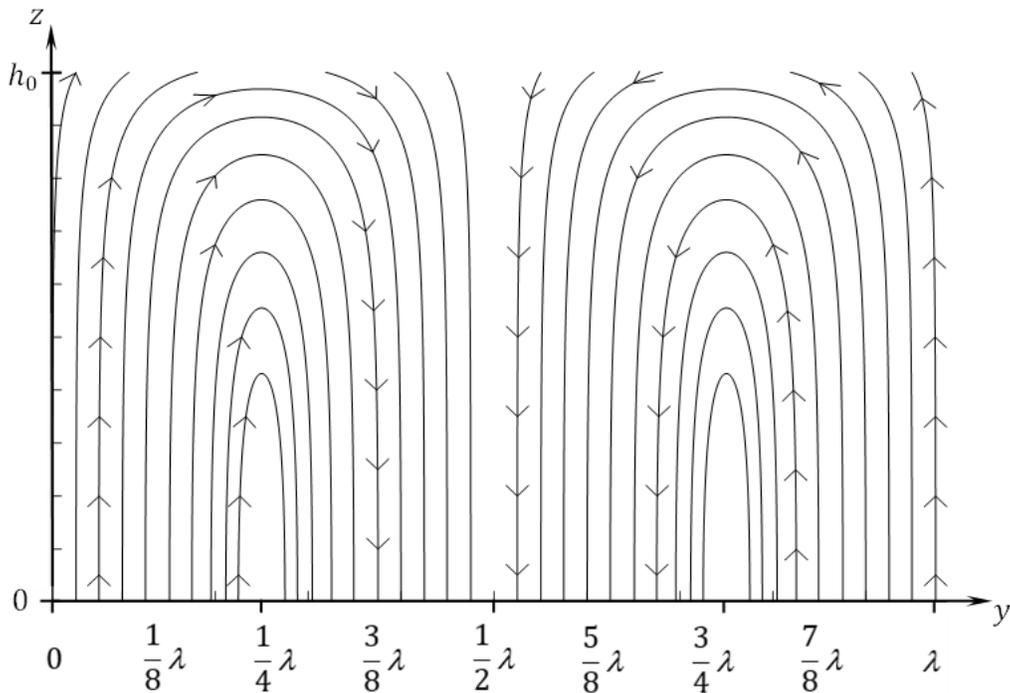


Figura 4. Líneas de corriente para un instante de tiempo $t > 0$.

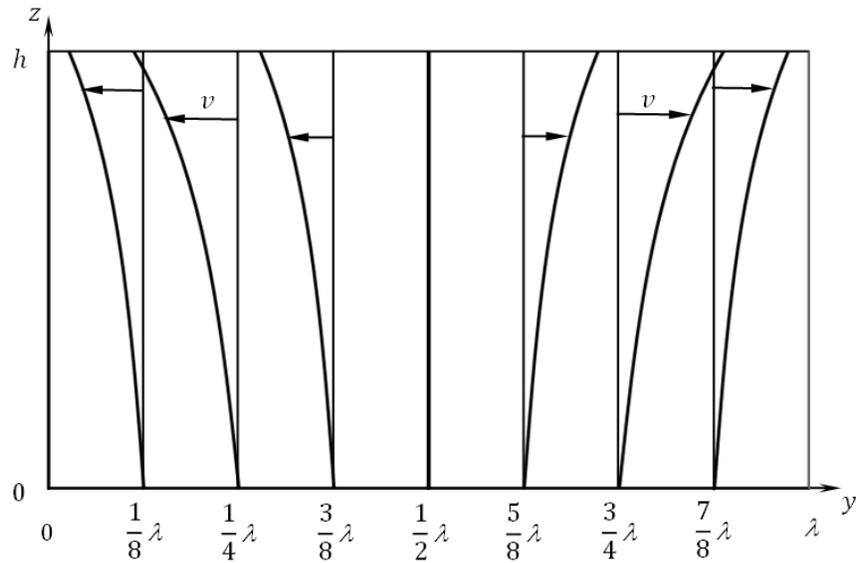


Figura 5. Perfil de velocidades de v , para distintas posiciones de y , para un tiempo t . Para $y = 0, \lambda/2$ y λ la velocidad v es nula desde el fondo hasta la superficie libre. Los valores $y = 0$ e $y = \lambda$ corresponden a los máximos de la ondulación del lecho, respectivamente, e $y = \lambda/2$ al más bajo. Para $t \rightarrow \infty$, la velocidad es nula en todo el dominio del flujo.

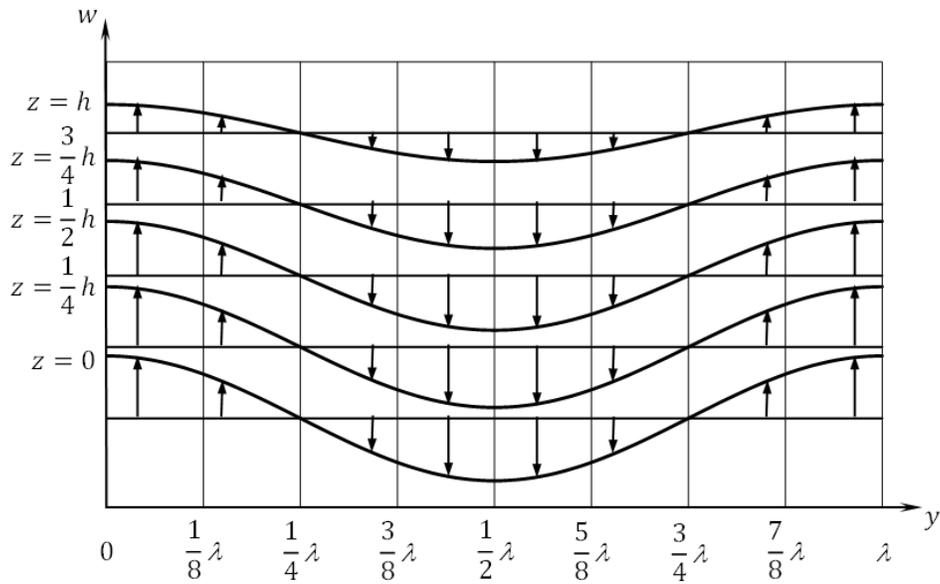


Figura 6. Perfil de velocidades de w , para distintas posiciones de z , para un tiempo t . Esta componente de velocidad se encuentra en fase con la deformación del lecho. La amplitud de la velocidad disminuye a medida que se acerca a la superficie libre. Para $t \rightarrow \infty$, cuando la deformación del lecho ha alcanzado su amplitud de equilibrio, la velocidad es nula en todo el dominio de flujo.

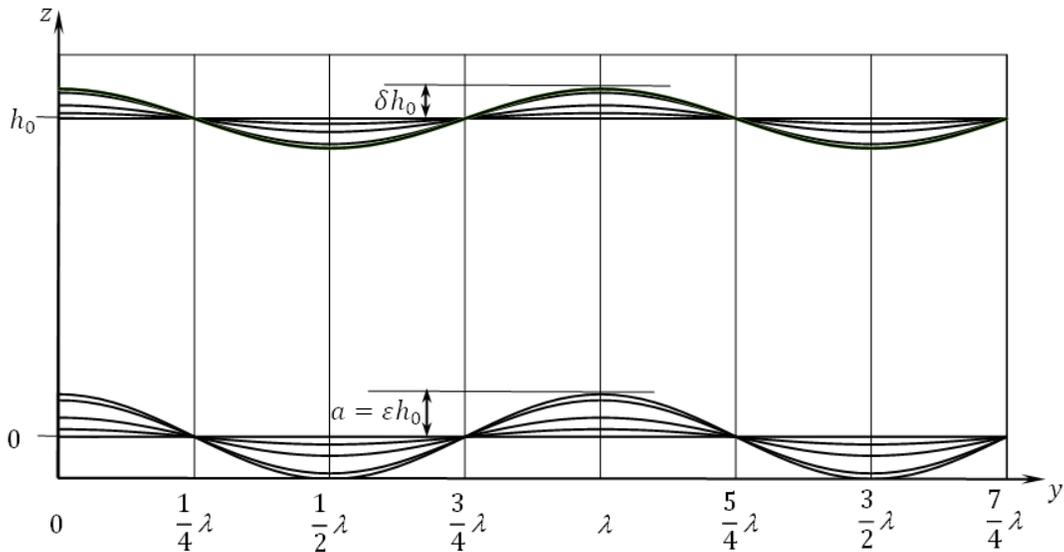


Figura 7. Deformación del lecho y de la superficie libre en función del tiempo. En $t = 0$ tanto el lecho como la superficie libre son superficies planas ($z = 0$ y $z = h_0$, respectivamente). A medida que aumenta el tiempo también lo hacen las deformaciones, tendiendo asintóticamente a $a = \epsilon h_0$ la amplitud del lecho y a $\delta h_0 < a$ la superficie libre. Las distintas curvas muestran las deformaciones para los tiempos adimensionales $-\beta t = 0; 0,2; 0,6; 2$ y 10 .

4. CONCLUSIÓN

Siguiendo la línea trazada por Navier (1823) y Stokes (1851) quienes aplicaron las ecuaciones por ellos deducidas para determinar analíticamente las soluciones de distintos tipos de flujos, en este artículo se estudió un caso particular del escurrimiento con superficie libre, determinando el campo de velocidades transversales al flujo principal y la deformación de la superficie debido a una deformación continua, armónica, del lecho. La condición de una deformación pequeña respecto a la altura del escurrimiento permite resolver analíticamente el sistema de ecuaciones diferenciales que describen al flujo mediante el método de perturbaciones. Aunque no se presenta en este trabajo, la velocidad en la dirección principal del flujo puede determinarse analíticamente sin mayores dificultades a partir de la Ec. 15.

La solución aquí presentada corresponde a un caso particular de deformación temporal del lecho, la que parte de una condición plana hasta alcanzar asintóticamente una amplitud máxima de deformación (Ec. 41). Es posible extender el análisis a otras funciones del tiempo que puedan ser expresadas como series de Fourier.

AGRADECIMIENTOS

RG agradece al programa de becas de doctorado ANID por el financiamiento recibido para sus estudios en el programa de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, mención

Fluidodinámica, de la Universidad de Chile mediante la beca Doctorado Nacional 2022-21221030.

AT agradece el financiamiento otorgado a través del proyecto ANID Project AFB180004.

REFERENCIAS

- Benjamin, T.B. (1959) "Shearing Flow Over a Wavy Boundary", J. Fluid. Mech., 6, 161-205.
- Caponi, E.A., B. Fornberg, D.D. Knight, J.W. Mclean, P.G. Saf Fman~Anhd. C.Yuen (1989) "Calculations of laminar viscous flow over a moving wavy surface", J. Fluid Mech. Vol. 124, pp. 347-362.
- Kaneko, A., H. Honji (1979) "Double structures of steady streaming in the oscillatory viscous flow over a wavy wall", J. Fluid Mech. Vol. 93, part 4, pp. 727-736.
- Lyne, W.H. (1971) "Unsteady viscous flow over a wavy wall", J. Fluid Mech. Vol. 50, part 1, pp. 33-48.
- Nayfeh, A.H. (2004) *Perturbation Methods*. WILEY-VCH Verlag GmbH & CO. KGaA, Weinheim. Capítulo 2.
- Navier, C. L. M. H. (1823) "Memoire sur les lois du mouvement des fluides", Mem. Acad. R. Sci. Paris, vol. 6, pp. 389-416. (Leído en la l'Académie royale des Sciences el 18 de marzo de 1822).
- Shivamoggi, B.K. (2003) *Perturbation Methods for Differential Equations*. Birkhauser. Boston. Sección 2.4.
- Stokes, G.G. (1851) "On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums", Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. IX, Part II, pp. 8-106. (Leído el 9 de diciembre de 1850)
- Vittori, G. (1989) "Non-linear viscous oscillatory flow over a small amplitude wavy wall", J. Hyd. Res., Vol. 27, No. 2, pp. 267-280.

ACERCA DE LOS AUTORES

Rodrigo González es Ingeniero Civil, mención Hidráulica, Sanitaria y Ambiental y Magister en Ciencias de la Ingeniería, mención Recursos Hídricos y Medio Ambiente, ambos por la Universidad de Chile. En la actualidad es alumno del Programa de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, mención Fluidodinámica en la misma Universidad. Sus áreas de interés se centran en soluciones analíticas y aproximaciones por perturbaciones para flujos de fluidos tanto newtonianos como no newtonianos.

Aldo Tamburrino es Ingeniero Civil mención Hidráulica de la Universidad de Chile, M.Sc. y Ph.D. in Civil Engineering de la Universidad de Minnesota, EEUU. Es Profesor Asociado del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Chile, donde enseña cursos de pre y postgrado de dicha universidad. Actualmente sus áreas de interés se centran en hidráulica fundamental, flujos detríticos, granulares y de fluidos no-newtonianos.

MODIFICACIÓN DE LOS TEOREMAS DE PROMEDIADO VOLUMÉTRICO EN MEDIOS POROSOS

RODOLFO MORALES

Alumno del Programa de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería mención Fluidodinámica,
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile
Ingeniero Especialista en el Área de Geociencias de JRI Ingeniería S.A.

rodolfomorales@ug.uchile.cl

ORCID: 0000-0002-3919-1428

RESUMEN

La descripción matemática de los medios porosos se logra por medio de teoremas de promediado, los que permiten relacionar variaciones (espaciales o temporales) de magnitudes promedio en un volumen de control macroscópico, con el promedio de las variaciones (espaciales o temporales) a escala microscópica, i.e., permiten trabajar con magnitudes significativas. El uso de estos teoremas conduce a expresiones como la ecuación de Darcy para el flujo de una fase fluida, a partir de las ecuaciones de Navier Stokes y las condiciones de borde en la interfaz fluido-sólido. En el presente estudio se desarrolla un trabajo teórico sobre los teoremas de promediado, atendiendo a que el vector posición del volumen de control se debe corresponder con el centro de masa de la fase de interés (en este estudio, la fase fluida) y no con el centroide del volumen de control. Se presentan los teoremas de promediado modificados, junto a las ecuaciones de balance de masa y momentum para un fluido newtoniano incompresible y de viscosidad constante, realizándose una estimación simple de la corrección introducida en la permeabilidad de Darcy.

Palabras claves: Medios porosos, Promedio volumétrico, Ley de Darcy, Teorema de transporte de Reynolds.

1. INTRODUCCIÓN

Los medios porosos se encuentran compuestos por una estructura sólida con poros en su interior. Muchos materiales presentes en la naturaleza (e.g. rocas, suelos, acuíferos), tejidos biológicos (e.g. huesos, madera) y elaborados por el hombre (e.g. cemento, cerámicas) pueden ser considerados medios porosos. Su descripción matemática se realiza empleando diferentes técnicas dependiendo de la escala del fenómeno. Descripciones microscópicas son empleadas para aquellos fenómenos a escalas menores al tamaño de los poros y/o matriz sólida (consideradas mucho mayores a las dimensiones moleculares), mientras que las macroscópicas son utilizadas a escalas mayores. Estas últimas son frecuentemente suficiente para obtener las ecuaciones gobernantes que reflejan el transporte a la escala de los poros en el medio poroso.

El método de promediado volumétrico es por medio del cual se obtiene la descripción macroscópica, permitiendo recuperar expresiones como la ecuación de Darcy (1856) para el flujo de una fase fluida, a partir de las ecuaciones de Navier Stokes y las condiciones de borde en la interfaz fluido-sólido. El flujo a través de un medio poroso se compone de una fase fluida y una sólida. Asumiendo que la fase fluida ocupa un volumen V_f , en un volumen V representativo del medio poroso, el volumen ocupado por la fase sólida es $V_s = V - V_f$. Para que las ecuaciones resultantes proporcionen resultados significativos, las escalas de distancia deben satisfacer

$$L_{poro} \ll L_{volumen} \ll L_{sistema}, \quad (1)$$

donde L_{poro} es una escala microscópica asociada al tamaño de poros, $L_{volumen}$ es el largo característico del volumen de promediado o área, y $L_{sistema}$ es el largo característico del sistema en estudio (ver Figura 1). Esta restricción de escalas es la que asegura que las magnitudes promedio no dependan del tamaño de la región de promediado (Wang et al., 2015).

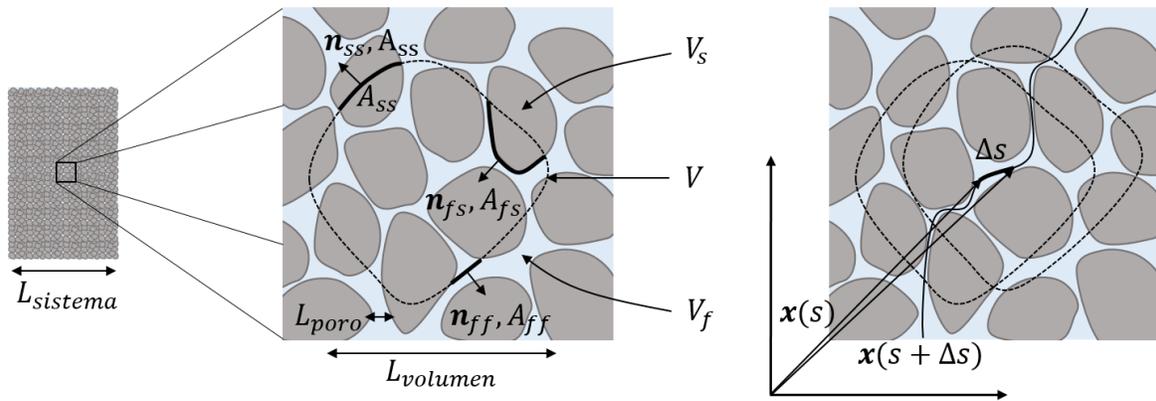


Figura 1. Medio poroso con fases fluida y sólida. A la izquierda, sistema a describir. Al centro, definición volumen de control, volumen de fases e interfaces. A la derecha, parametrización por longitud de arco.

Las magnitudes promedio son típicamente asignadas al centroide del volumen de promediado (Howes y Whitaker S, 1985). Se define el valor promedio $\langle B_k \rangle$ de cualquier magnitud física B asociada a la fase $k = \{f, s\}$ en el volumen V de acuerdo con

$$\langle B_k \rangle(x, t) = \frac{1}{V} \int_{V_k} B_k(\mathbf{x}', t) dV_k. \quad (2)$$

De forma análoga, se define el valor promedio intrínseco $\langle B_k \rangle_k$ de B en la fase k como:

$$\langle B_k \rangle_k(x, t) = \frac{1}{V_k} \int_{V_k} B(\mathbf{x}', t) dV_k. \quad (3)$$

Este último es la magnitud promedio de mayor uso. Ambos promedios se relacionan por

$$\langle B_k \rangle(\mathbf{x}, t) = \phi_k \langle B \rangle_k(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

donde $\phi_k = V_k/V$ corresponde a la fracción de volumen local de la fase k . En las expresiones precedentes, se debe notar que B es una función del vector posición \mathbf{x}' y el tiempo, mientras que su valor promedio es una función de la coordenada \mathbf{x} y el tiempo. En lo que sigue se omitirá la dependencia explícita de las variables para simplificar la notación.

Las ecuaciones macroscópicas gobernantes se obtienen promediando las ecuaciones de conservación microscópicas sobre un volumen representativo. Para conseguir esto se utilizan los teoremas de promediado, siguiendo el procedimiento desarrollado por Slattery (1967) para escribir el gradiente de un promedio en términos del promedio de un gradiente a través del teorema de transporte de Reynolds generalizado. En su forma convencional, el teorema de transporte de Reynolds relaciona la variación temporal del valor integral de una magnitud B al interior de un volumen de control V de área A , con el valor integral de la variación temporal de B y su flujo a través de A . La forma general del teorema de transporte se obtiene reemplazando el tiempo t por la longitud de arco s (esto simplemente significa que existe un mapeo continuo e invertible entre puntos y coordenadas materiales) y, aplicado a la fase fluida al interior de un volumen de control V , puede ser escrito como:

$$\frac{d}{ds} \left(\int_{V_f} B dV \right) = \int_{V_f} \frac{\partial B}{\partial s} dV + \int_{A_f} B \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{x}'}{ds} dA. \quad (5)$$

El área A_f puede ser dividida en

$$A_f = A_{ff} + A_{fs}, \quad (6)$$

donde A_{ff} es el área de la fase fluida que pasa a través de la superficie del volumen V , y A_{fs} es el área entre las fases fluida y sólida al interior de V . La obtención de los teoremas de promediado requiere de las siguientes condiciones: (1) $B = B(\mathbf{x}'(s), t)$ es una función explícita de las coordenadas y el tiempo, i.e., $\partial_s B = 0$; (2) $d\mathbf{x}'/ds$ es un vector tangente a la interfaz A_{fs} , i.e., $d\mathbf{x}'/ds \cdot \mathbf{n} = 0$ en A_{fs} ; y (3), suponiendo que el volumen V es trasladado sin rotación a lo largo de la curva s , $d\mathbf{x}'/ds \cdot \mathbf{n} = d\mathbf{x}/ds \cdot \mathbf{n}$ en A_{ff} . Aplicando estas condiciones en la Ec. (5) y teniendo en consideración que $dF/ds = \nabla F \cdot d\mathbf{x}/ds$ para cualquier magnitud F , se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\int_{V_f} B dV \right) &= \nabla \left(\int_{V_f} B dV \right) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} \\ &= \int_{A_{ff}} B \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{x}'}{ds} dA \\ &= \left(\int_{A_{ff}} B \mathbf{n} dA \right) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} \\ &= \left(\int_{V_f} \nabla B dV - \int_{A_{fs}} B \mathbf{n} dA \right) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds}. \end{aligned} \quad (7)$$

Atendiendo a la arbitrariedad de $d\mathbf{x}/ds$ se obtiene el teorema de promediado para el gradiente:

$$\nabla \left(\int_{V_f} B dV \right) = \int_{V_f} \nabla B dV - \int_{A_{fs}} B \mathbf{n} dA. \quad (8)$$

Si $B = 1$ en esta expresión, se sigue que $\nabla V_f = - \int_{A_{fs}} \mathbf{n} dA$, de modo que si V es constante, se sigue que:

$$\nabla \phi_f = - \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \mathbf{n} dA. \quad (9)$$

Luego, el teorema de promediado para el gradiente puede ser convenientemente expresado en términos de promedios intrínsecos de acuerdo con:

$$\nabla \langle B_f \rangle_f = \langle \nabla B_f \rangle - \frac{1}{V_f} \int_{A_{fs}} (B - \langle B_f \rangle_f) \mathbf{n} dA \quad (10)$$

Este resultado es ampliamente utilizado en aplicaciones a estructuras porosas arbitrarias, jugando un rol importante en la derivación de las ecuaciones macroscópicas gobernantes en el flujo a través de medios porosos. Mediante su empleo, la ecuación de balance de momentum para un fluido newtoniano incompresible de viscosidad constante, puede ser escrita en la forma (sin contribuciones inerciales):

$$0 = -\nabla \langle P \rangle_f + \mu \nabla \cdot \langle \nabla \mathbf{v} \rangle + \frac{\mu}{V_f} \int_{A_{fs}} (\nabla \mathbf{v} - \langle \nabla \mathbf{v} \rangle) \cdot \mathbf{n} dA - \frac{1}{V_f} \int_{A_{fs}} (P - \langle P_f \rangle_f) \mathbf{n} dA. \quad (11)$$

Aquí, el segundo, tercer y cuarto término se conocen como contribuciones de Brinkman, arrastre por fricción viscosa y arrastre de forma, respectivamente (Brinkmann, 1949; Kaviani, 2012; Vafai y Tien, 1981; Hsu y Cheng, 1990; Nield y Bejan, 2013). Los últimos dos componen la fuerza de arrastre descrita por la ecuación empírica de Darcy:

$$\begin{aligned} \rho_f \mathbf{f}_D &= \frac{\mu}{V_f} \int_{A_{fs}} (\nabla \mathbf{v} - \langle \nabla \mathbf{v} \rangle) \cdot \mathbf{n} dA - \frac{1}{V_f} \int_{A_{fs}} (P - \langle P_f \rangle_f) \mathbf{n} dA \\ &\equiv - \frac{\phi_f \mu}{K} \langle \mathbf{v}_f \rangle_f. \end{aligned} \quad (12)$$

Ahora bien, conforme se mencionó con anterioridad, Howes y Whitaker (1985) definen el vector posición \mathbf{x} como el centroide del volumen V de control utilizado para promediar. Sin embargo, esta definición es cuestionable, ya que la conservación de la masa requiere que las partículas que componen la fase fluida en un instante t , se desplacen desde $V_f(t)$ a $V_f(t + \Delta t)$ en un intervalo de tiempo Δt . Por lo tanto, \mathbf{x} es un vector posición para V_f , no para V . Luego, una descripción consistente se consigue identificando el centro de masa de V_f como el vector posición, quedando definido mediante

$$\mathbf{x} = \frac{1}{m_f} \int_{V_f} \rho \mathbf{x}' dV, \quad (13)$$

con la masa del fluido al interior del volumen de control dada por:

$$m_f = \langle \rho_f \rangle_f V_f. \quad (14)$$

De forma análoga, se define la velocidad de la fase fluida en el volumen de control en la forma:

$$\mathbf{v}_f = \frac{1}{m_f} \int_{V_f} \rho \mathbf{v} dV. \quad (15)$$

En este punto se debe notar que el numerador de la Ec. (15) se puede escribir como $\int_{V_f} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V_f} \rho (d\mathbf{x}'/dt) dV = \int_{V_f} d(\rho \mathbf{x}' dV)/dt$, donde se ha atendido a que $dm = \rho dV$ es invariante con respecto al movimiento de las partículas del fluido. Luego, es claro que $\int_{V_f} \rho \mathbf{v} dV = d/dt \left(\int_{V_f} \rho \mathbf{x}' dV \right) = m_f d\mathbf{x}/dt$.

Una discusión similar es elaborada por Takatsu Y. (2017), justificando a \mathbf{x} como un vector posición para el centro de masa de V_f y no para el centroide de V . Sin embargo, su desarrollo de la hipótesis no contempla el que una consecuencia inmediata de esta propuesta es que V no es necesariamente igual en cada punto del espacio, incluso si la fase fluida es incompresible. En efecto, si \mathbf{x} es el vector posición asociado al par $V_f(\mathbf{x}), V(\mathbf{x})$ para un punto ubicado en $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$, el par será $V_f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}), V(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$. Ahora bien, dado que la definición del vector posición $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ requiere que dicha posición sea el centro de masa de $V_f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$, el volumen de control $V(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ no corresponderá necesariamente a una traslación del volumen $V(\mathbf{x})$.

Con relación a las características del método de promediado volumétrico, Marle (1982), Howes y Whitaker (1985) y otros autores concluyen que no es necesariamente diferenciable en el campo microscópico. Marle (1982) considera que la magnitud B es continua con derivadas continuas en cada fase, con discontinuidades de salto al cruzar una interfaz, e introduce funciones de peso para solucionar el problema con la diferenciabilidad del campo microscópico.

En el presente estudio se desarrolla un trabajo teórico sobre los teoremas de promediado, atendiendo a que el vector posición del volumen de control se debe corresponder con el centro de masa de la fase de interés (en este estudio, la fase fluida) y no con el centroide del volumen de control. Se presentan los teoremas de promediado modificados, junto a las ecuaciones de balance de masa y momentum para un fluido newtoniano incompresible y de viscosidad constante, realizándose una estimación simple de la corrección introducida en la permeabilidad de Darcy.

2. MODIFICACIÓN TEOREMA DE PROMEDIADO ESPACIAL

Conforme se ilustró en la sección precedente, el teorema de promediado aplicado a la derivación espacial es fundamental para construir las ecuaciones macroscópicas gobernantes a partir de las ecuaciones de balance microscópico. Ahora bien, dado que el vector \mathbf{x} es un vector posición para el volumen de la fase fluida V_f y no del volumen de control V , se sigue que V no es necesariamente igual en cada punto del espacio, i.e., $d\mathbf{x}'/ds \cdot \mathbf{n} \neq d\mathbf{x}/ds \cdot \mathbf{n}$ en su frontera. Para incorporar este aspecto en la derivación del teorema bosquejada en la Ec. (7), se define el tensor de segundo orden:

$$\mathbf{e} = \nabla(\mathbf{x}' - \mathbf{x}). \quad (16)$$

Manteniendo las condiciones de dependencia explícita de B en las coordenadas y el tiempo, i.e., $\partial_s B = 0$, y de tangencia en la interfaz entre ambas fases de $d\mathbf{x}'/ds$, i.e., $d\mathbf{x}'/ds \cdot \mathbf{n} = 0$ en A_{fs} , e introduciendo la definición proporcionada por la Ec. (16) sobre la Ec. (5) (teorema general de transporte de Reynolds) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\int_{V_f} B dV \right) &= \nabla \left(\int_{V_f} B dV \right) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} \\ &= \int_{A_{ff}} B \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{x}'}{ds} dA \\ &= \left(\int_{A_{ff}} B \mathbf{n} dA + \int_{A_{ff}} B \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} dA \right) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} \\ &= \left(\int_{V_f} \nabla B dV - \int_{A_{fs}} B \mathbf{n} dA + \int_{A_{ff}} B \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} dA \right) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds}. \end{aligned} \quad (17)$$

Este resultado puede ser reescrito atendiendo a que debe ser válido para cualquier valor de $d\mathbf{x}/ds$, a partir de donde se sigue que:

$$\nabla \left(\int_{V_f} B dV \right) = \int_{V_f} \nabla' B dV - \int_{A_{fs}} B \mathbf{n} dA + \int_{A_{ff}} B \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} dA. \quad (18)$$

Si se escoge $B = 1$ en la Ec. (18) se obtiene la siguiente identidad:

$$\nabla V_f = - \int_{A_{fs}} \mathbf{n} dA + \int_{A_{ff}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} dA. \quad (19)$$

De forma análoga, si se repite el cálculo anterior considerando la fase sólida se obtiene

$$\nabla V_s = + \int_{A_{fs}} \mathbf{n} dA + \int_{A_{ss}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} dA, \quad (20)$$

donde el primer miembro en el lado derecho de la Ec. (20) difiere en signo de la Ec. (19) a causa del cambio en el sentido del vector normal. Por otro lado, dado que $V = V_f + V_s$, es inmediato que:

$$\begin{aligned}\nabla V &= \nabla V_f + \nabla V_s \\ &= \int_{A_{ff}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} dA + \int_{A_{ss}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} dA.\end{aligned}\quad (21)$$

A partir de las ecuaciones (19) y (20) se deriva el siguiente resultado para la fracción volumétrica de la fase fluida:

$$\begin{aligned}\nabla \phi_f &= \nabla \left(\frac{V_f}{V} \right) \\ &= \frac{\nabla V_f}{V} - \phi_f \frac{\nabla V}{V} \\ &= -\frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \mathbf{n} dA + \frac{1 - \phi_f}{V} \int_{A_{ff}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} dA - \frac{\phi_f}{V} \int_{A_{ss}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} dA\end{aligned}\quad (22)$$

Sustituyendo la Ec. (20) y la Ec. (21) en la Ec. (18) se obtiene el siguiente resultado para el gradiente de un promedio:

$$\begin{aligned}\nabla \langle B_f \rangle &= \langle \nabla' B_f \rangle - \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} B \mathbf{n} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ff}} (B - \langle B_f \rangle) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} dA \\ &\quad - \frac{1}{V} \int_{A_{ss}} \langle B_f \rangle \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} dA.\end{aligned}\quad (23)$$

Finalmente, combinando las ecuaciones (22) y (23) se obtiene la expresión equivalente para el gradiente de un promedio en función del promedio de un gradiente, en términos de promedios intrínsecos:

$$\nabla \langle B_f \rangle_f = \langle \nabla' B_f \rangle_f - \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} (B - \langle B_f \rangle_f) \mathbf{n} dA + \frac{1}{V_f} \int_{A_{ff}} (B - \langle B_f \rangle_f) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} dA.\quad (24)$$

Este resultado representa una modificación del teorema de promediado para el gradiente presentado en la Ec. (10), incorporando en el efecto asociado a la interpretación del vector posición como el centro de masa del volumen de la fase fluida en lugar del centroide del volumen de control. Se debe notar que tanto la Ec. (10) como (24) contienen contribuciones de superficie cuyos argumentos corresponden a desviaciones en el valor de B con relación a su valor promedio intrínseco $\langle B_f \rangle_f$.

3. MODIFICACIÓN TEOREMA DE PROMEDIADO TEMPORAL

El teorema de promediado para la derivada temporal se consigue utilizando el tiempo t en lugar de la longitud de arco s sobre el teorema general del transporte de Reynolds en la Ec. (5). Para proceder con su derivación incorporando la posibilidad de deformación del volumen de control, se comienza por definir la velocidad local de deformación según:

$$\mathbf{w} = \frac{d(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{dt}. \quad (25)$$

Empleando esta definición sobre la Ec. (5) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{V_f} B dV \right) &= \int_{V_f} \partial_t B dV + \int_{A_f} B \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{x}'}{dt} dA \\ &= \int_{V_f} \partial_t B dV + \int_{A_{fs}} B \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dA + \int_{A_{ff}} B \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{x}'}{dt} dA \\ &= \int_{V_f} \partial_t B dV + \int_{A_{fs}} B \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dA + \int_{A_{ff}} B \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_f dA \\ &\quad + \int_{A_{ff}} B \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} dA \\ &= \int_{V_f} \partial_t B dV + \int_{A_{fs}} B \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dA + \mathbf{v}_f \cdot \left[\int_{V_f} \nabla' B dV - \int_{A_{fs}} B \mathbf{n} dA \right] \\ &\quad + \int_{A_{ff}} B \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} dA, \end{aligned} \quad (26)$$

donde $\mathbf{u} = d\mathbf{x}'/dt$ es la velocidad en la interfaz entre las fases fluida y sólida, y \mathbf{v}_f es la velocidad promedio intrínseca de la fase fluida. Empleando la Ec. (18) para reescribir el término entre corchetes en la última igualdad de (26), se sigue que puede ser reescrito en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{V_f} B dV \right) &= \int_{V_f} \partial_t B dV + \int_{A_{fs}} B \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dA + \mathbf{v}_f \\ &\quad \cdot \left[\nabla \left(\int_{V_f} B dV \right) - \int_{A_{ff}} B \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} dA \right] + \int_{A_{ff}} B \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} dA. \end{aligned} \quad (27)$$

Ahora bien, atendiendo a que el lado izquierdo es una derivada total, y a la definición proporcionada por la Ec. (15) para la velocidad \mathbf{v}_f , se sigue que:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{V_f} B dV \right) = \partial_t \left(\int_{V_f} B dV \right) + \mathbf{v}_f \cdot \nabla \left(\int_{V_f} B dV \right). \quad (28)$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec. (27) se tiene:

$$\partial_t \left(\int_{V_f} B dV \right) = \int_{V_f} \partial_t B dV + \int_{A_{fs}} B \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} dA + \int_{A_{ff}} B (\mathbf{w} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_f) \cdot \mathbf{n} dA. \quad (29)$$

A partir de este resultado, y asumiendo una velocidad interfacial \mathbf{u} nula, se obtiene el siguiente resultado para la derivada temporal de un promedio:

$$\begin{aligned}\partial_t \langle B_f \rangle &= \partial_t \left(\frac{1}{V} \int_{V_f} B dV \right) \\ &= \langle \partial_t B_f \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{ff}} B (\mathbf{w} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_f) \cdot \mathbf{n} dA - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} \langle B_f \rangle.\end{aligned}\quad (30)$$

Si se escoge $B = 1$ se sigue que:

$$\partial_t \phi_f = \frac{1}{V} \int_{A_{ff}} (\mathbf{w} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_f) \cdot \mathbf{n} dA - \frac{\phi_f}{V} \partial_t V. \quad (31)$$

Atendiendo a que $\partial_t \langle B_f \rangle = \partial_t (\phi_f \langle B_f \rangle_f)$, se puede reescribir la Ec. (30) como:

$$\langle \partial_t B_f \rangle_f + \frac{1}{V_f} \int_{A_{ff}} B (\mathbf{w} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_f) \cdot \mathbf{n} dA - \frac{\partial_t V}{V_f} \langle B_f \rangle_f = \langle B \rangle_f \partial_t \phi_f + \phi_f \partial_t \langle B_f \rangle_f. \quad (32)$$

Finalmente, despejando $\partial_t V$ en la Ec. (31) y sustituyendo en (32) se obtiene la expresión buscada para la derivada temporal de un promedio en función del promedio de su derivada temporal, en términos de promedio intrínsecos:

$$\partial_t \langle B_f \rangle_f = \langle \partial_t B_f \rangle_f + \frac{1}{V_f} \int_{A_{ff}} (B - \langle B_f \rangle_f) (\mathbf{w} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_f) \cdot \mathbf{n} dA \quad (33)$$

4. ECUACIONES DE BALANCE

Las ecuaciones (24) y (33) relacionan las variaciones (espacial y temporal) en el promedio (intrínseco) de una magnitud física con el promedio de sus variaciones (espacial y temporal) en un volumen de control. Entre sus aplicaciones inmediatas se encuentra la derivación de las ecuaciones de balance macroscópicas gobernantes. Estas son presentadas a continuación para los balances de masa y momentum considerando el flujo de un fluido newtoniano incompresible y de viscosidad constante, despreciando las contribuciones inerciales frente a las viscosas.

4.1 Balance de Masa

La ecuación de balance de masa microscópica para un fluido incompresible equivale a la divergencia nula del campo de velocidad:

$$0 = \nabla' \cdot \mathbf{v} \quad (34)$$

Empleando el teorema de promediado para el gradiente proporcionado por la Ec. (24) sobre la Ec. (34), se sigue que ésta equivale a:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}_f + \frac{1}{V_f} \int_{A_{fs}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_f) \cdot \mathbf{n} dA - \frac{1}{V_f} \int_{A_{ff}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_f) \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) dA. \quad (35)$$

4.2 Balance de Momentum

La ecuación de balance de momentum microscópica para un fluido newtoniano de viscosidad constante sin fuerzas de volumen (e. g. gravedad), equivale a:

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \nabla' \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla'P + \mu\nabla \cdot (\nabla\mathbf{v}) \quad (36)$$

Empleando el teorema de promediado para el gradiente proporcionado por la Ec. (24) sobre la Ec. (36) y despreciando las contribuciones inerciales, se sigue que ésta equivale a:

$$\begin{aligned} 0 = & -\nabla\langle P_f \rangle_f + \mu\nabla \cdot \langle \nabla\mathbf{v}_f \rangle_f \\ & + \frac{1}{V_f} \int_{A_{fs}} [\mu(\nabla\mathbf{v} - \langle \nabla\mathbf{v}_f \rangle_f) - (P - \langle P_f \rangle_f)\mathbf{I}] \cdot \mathbf{n}dA \\ & - \frac{1}{V_f} \int_{A_{ff}} [\mu(\nabla\mathbf{v} - \langle \nabla\mathbf{v}_f \rangle_f) - (P - \langle P_f \rangle_f)\mathbf{I}] \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})dA \end{aligned} \quad (37)$$

Las ecuaciones de balance resultantes difieren en sólo en un término respecto a las obtenidas empleando el teorema de promediado para el gradiente sin modificar, i.e., incorporan una contribución adicional asociada a una posible deformación del volumen de control como consecuencia de la interpretación del vector posición como el centro de masa del volumen de la fase fluida en lugar del centroide del volumen de control.

5. CORRECCIÓN PERMEABILIDAD DE DARCY

Las contribuciones de superficie originadas en la interfaz entre las fases fluida y sólida contenidas por las ecuaciones de balance macroscópicas son las que proporcionan la fuerza de arrastre descrita por la ecuación empírica de Darcy. De este modo, enunciado la ecuación de balance de momentum macroscópico en la forma

$$0 = -\nabla P + \mu\nabla \cdot \langle \nabla\mathbf{v}_f \rangle_f + \rho_f \mathbf{f}_D, \quad (38)$$

se sigue a partir del resultado encontrado en la Ec. (37), que la fuerza de arrastre $\rho_f \mathbf{f}_D$ de Darcy se encuentra dada por:

$$\begin{aligned} \rho_f \mathbf{f}_D = & \frac{1}{V_f} \int_{A_{fs}} [\mu(\nabla\mathbf{v} - \langle \nabla\mathbf{v}_f \rangle_f) - (P - \langle P_f \rangle_f)\mathbf{I}] \cdot \mathbf{n}dA \\ & - \frac{1}{V_f} \int_{A_{ff}} [\mu(\nabla\mathbf{v} - \langle \nabla\mathbf{v}_f \rangle_f) - (P - \langle P_f \rangle_f)\mathbf{I}] \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})dA \\ \equiv & -\frac{\phi_f \mu}{K} \langle \mathbf{v}_f \rangle_f. \end{aligned} \quad (39)$$

Para comprender el impacto y condiciones bajo las cuales la contribución adicional introducida en esta expresión es relevante, considere la solución de orden cero para el flujo de un fluido al interior de un medio poroso bidimensional, en que los poros pueden ser aproximados como canales de paredes cuasi paralelas. Definiendo convenientemente los ejes

x e y , con este último orientado de forma paralela al flujo, es sencillo demostrar que el campo de velocidad microscópico es $\mathbf{v} = v_y(x)\hat{y}$ con

$$v_y = -\frac{L_p^2}{8\mu} \frac{\Delta P}{L} (1 - \tilde{x}^2) = \frac{3}{2} \langle v_y \rangle (1 - \tilde{x}^2), \quad (40)$$

donde $\Delta P/L$ corresponde a la caída de presión por unidad de largo, $\langle v_y \rangle = L_p^2 \Delta P / 12\mu L$ es la velocidad promedio, L_p es el ancho de los canales y $\tilde{x} = 2x/L_p \in [-1,1]$. De igual forma, se puede demostrar que los esfuerzos de corte se encuentran dados por:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_y}{dx} = \frac{L_p}{2} \frac{\Delta P}{L} \tilde{x} = -6\mu \frac{\langle v_y \rangle}{L_p} \tilde{x} \quad (41)$$

Aquí, la fuerza de arrastre por fricción viscosa (sin corrección) se origina en la interfaz entre el fluido y las paredes horizontales, encontrándose determinada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_f} \int_{A_{fs}} \tau_{yx} n_x dA &= \frac{1}{L_p L_y} \left(\int_{-\frac{L_y}{2}}^{\frac{L_y}{2}} \tau_{yx} dy \Big|_{\tilde{x}=1} - \int_{-\frac{L_y}{2}}^{\frac{L_y}{2}} \tau_{yx} dy \Big|_{\tilde{x}=-1} \right) \\ &= -\frac{\mu}{L_p^2/12} \langle v_y \rangle. \end{aligned} \quad (42)$$

En este resultado se debe observar que las contribuciones originadas en ambas paredes no se cancelan entre sí, debido a que los esfuerzos de corte son funciones impares y al cambio de sentido del vector normal entre las fases fluida y sólida. Para obtener un resultado análogo al incluir el término de corrección, se requiere que el producto $\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})$, cuya única componente no nula es $\tau_{yx} n_y e_{xy}$, no se cancele en la integración a lo ancho del canal, ni el sumar las contribuciones provenientes de la entrada y salida. La primera de estas condiciones requiere que e_{xy} sea una función impar en \tilde{x} , en tanto que la segunda requiere que también lo sea en la coordenada vertical. Si se expande e_{xy} en series de Taylor, se sigue que la primera contribución que cumple ambas condiciones es

$$e_{xy} \sim \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{0,0} \tilde{x} \tilde{y}, \quad (43)$$

donde $\tilde{y} = 2x/L_p \in [-1,1]$. Los términos de orden cero, uno y dos en la expansión no cumplen las condiciones de paridad, por lo que no contribuyen a la corrección en la fuerza de arrastre y no son consideradas. Luego,

$$\tau_{yx} e_{xy} n_y \sim -\frac{24\mu}{L_p} \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{0,0} \langle v_y \rangle \tilde{x}^2 \tilde{y} n_y \quad (44)$$

de donde se sigue que la corrección a la fuerza de arrastre corresponde a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{A_{ff}} \tau_{yx} e_{xy} n_y dA &\approx \frac{1}{L_p} \left(\int_{-1}^1 \tau_{yx} e_{xy} d\tilde{x} \Big|_{\tilde{y}=1} - \int_{-1}^1 \tau_{yx} e_{xy} d\tilde{x} \Big|_{\tilde{y}=-1} \right) \\ &= -\frac{32\mu}{L_p^2} \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{0,0} \langle v_y \rangle \end{aligned} \quad (45)$$

Finalmente, empleando los resultados encontrados en la Ec. (42) y (45) se sigue que la fuerza de arrastre por fricción viscosa es:

$$\frac{1}{V_f} \int_{A_{fs}} \tau_{yx} n_x dA + \frac{1}{V} \int_{A_{ff}} \tau_{yx} e_{xy} n_y dA = -\frac{\mu}{L_p^2/12} \left(1 + \frac{8}{3} \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{0,0} \right) \langle v_y \rangle \quad (46)$$

Se sigue, a partir de este ejemplo, que la corrección en la permeabilidad de Darcy es del tipo:

$$K^{-1} \sim K_0^{-1} \left(1 + O(L_p^2 \nabla^2 e) \right) \quad (47)$$

6. CONCLUSIONES

Se desarrolló un trabajo teórico sobre los teoremas de promediado volumétrico utilizados en la obtención de las ecuaciones macroscópicas gobernantes de un medio poroso a partir de las ecuaciones microscópicas que describen sus fases. Bajo el supuesto de que el vector posición del volumen de control utilizado en el cálculo de las magnitudes promedio se debe corresponder con el centro de masa de la fase de interés (en este estudio, la fase fluida) y no con el centroide del volumen de control. Como consecuencia de lo anterior, se demostró heurísticamente que el volumen de control no necesariamente permanece constante, aun si la fase fluida es incompresible. Se desarrollaron y obtuvieron versiones modificadas de los teoremas de promediado volumétrico permitiendo relacionar las variaciones (espacial y temporal) en el promedio (intrínseco) de una magnitud física con el promedio de sus variaciones en un volumen de control. Estos fueron utilizados para promediar las ecuaciones de balance de un fluido newtoniano incompresible y de viscosidad constante, realizándose una estimación simple de la corrección introducida en la permeabilidad de Darcy.

REFERENCIAS

- Blench, T. (1969) "Coordination in Mobile-Bed Hydraulics". J. Hyd. Div., ASCE, Vol. 95, No. HY6, pp. 1871-1898.
- Brinkman, H. (1949) "A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles", Flow, Turbulence and Combustion, Vol. 1, pp. 27-34.

- Cheng, P., C. Hsu (1990) "Thermal dispersion in a porous medium", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 33, pp. 1587-1597.
- Darcy, H. (1856) *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: Exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau: Ouvrage terminé par un appendice relatif aux fournitures d'eau de plusieurs villes, au filtrage des eaux et à la fabrication des tuyaux de fonte, de plomb, de tôle et de bitumen.* Vol. 2. Victor Dalmont (Ed.), Tipographie Hennuyer, Paris.
- Howes, F., S. Whitaker (1985) "The spatial averaging theorem revisited", Chemical Engineering Science, Vol. 40, pp. 1387-1392.
- Kaviany, M. (2012) *Principles of heat transfer in porous media.* Second Edition. Springer Science & Business Media. New York.
- Marle, C. (1982) "On macroscopic equations governing multiphase flow with diffusion and chemical reactions in porous media", International Journal of Engineering Science, Vol. 20, pp. 643-662.
- Nield, D., A. Bejan (2013) *Convection in porous media,* Fourth Edition. Springer Science & Business Media. New York
- Slattery, J. (1967) "Flow of viscoelastic fluids through porous media", AIChE Journal, Vol. 13, pp. 1066-1071.
- Takatsu, Y. (2017) "Modification of the fundamental theorem for transport phenomena in porous media", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 115 (B), pp. 1109-1120.
- Vafai, K., C. Tien (1981) "Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 24, pp. 195-203.
- Wang, L., L. Wang, Z. Guo, J. Mi (2015) "Volume-averaged macroscopic equation for fluid flow in moving porous media", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 82, pp. 357-368.

ACERCA DEL AUTOR

Rodolfo Morales Gálvez es Ingeniero Civil de Minas y Magíster en Ciencias de la Ingeniería Metalúrgica, Universidad Técnica Federico Santa María, Chile. Posee 5 años de experiencia en consultoría técnica, desempeñando el cargo de Ingeniero Especialista en el área de Geociencias de JRI Ingeniería S.A. Actualmente estudiante de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería Mención Fluidodinámica de la Universidad de Chile.

RECORDANDO AL INGENIERO CIVIL ALBERTO SEPÚLVEDA VERA

ALEJANDRO LÓPEZ ALVARADO

ala@vtr.net



Al inicio de agosto pasado fui sorprendido con la triste noticia de la muerte repentina y sorpresiva de mi recordado amigo Alberto Sepúlveda Vera, eminente Ingeniero Civil, excelente maestro en las aulas universitarias y un estudioso no sólo de la disciplina hidráulica sino también de otras actividades del conocimiento y de la realidad, entre ellas, la economía. En esta hora de pesar surge, como un consuelo, testimoniar con algunos recuerdos lo que fue mi amistad con Alberto y recordar algunas de sus contribuciones a la hidráulica nacional.

Alberto nació en San Carlos el 2 de febrero de 1939, pocos días después del trágico terremoto de Chillán, en una construcción de madera que su padre levantó de emergencia, debido al derrumbe de su casa. Estudió hasta Tercer Año de Humanidades en el Colegio Seminario de Chillán, continuando sus estudios en el Instituto Nacional de Santiago, ya que su familia se trasladó a esta ciudad.

En el Instituto Nacional fue condiscípulo de Ramón Fuentes Aguilar, profesor reconocido tanto nacional como internacionalmente como un hidráulico de excelencia y lamentablemente también fallecido no hace mucho. Curiosamente, mientras Ramón cursó el Sexto Humanidades Matemático, Alberto eligió el Sexto Humanidades Biólogo, tal vez más inclinado a la Medicina que a la Ingeniería. Sin embargo, finalmente Alberto se decidió por estudiar Ingeniería Civil en la Universidad de Chile, donde después de exitosos estudios obtuvo el título de Ingeniero Civil con mención en Hidráulica en el año 1965.

Su memoria de título fue experimental y la desarrolló en el Laboratorio de Hidráulica de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile y versó sobre la determinación de la altura de aspereza equivalente en tuberías de rocalit, memoria desarrollada en conjunto con Pablo Cortés y dirigida por el profesor don Francisco Javier Domínguez Solar, nuestro recordado Pancho Jota. Terminada su memoria ingresó como investigador y profesor al Laboratorio de Hidráulica ya mencionado, en donde yo me desempeñaba como ayudante de investigación y Ramón Fuentes como investigador y profesor.

Alberto participó primeramente como profesor de laboratorio y profesor auxiliar del curso de Hidráulica que dictaba el profesor Roberto Muñoz y más tarde añadió la responsabilidad de ser profesor guía de memorias de título de estudiantes de Ingeniería Civil.

En el Laboratorio de Hidráulica participamos con Alberto en varios estudios experimentales hasta 1969, año en que ambos nos incorporamos como ingenieros al Instituto Nacional de Hidráulica, institución en la que Alberto permaneció hasta 1972, pasando a incorporarse a la División de Estudios Hidráulicos de ENDESA hasta 1999 y a partir de esa fecha se dedicó a la consultoría en temas hidráulicos, principalmente en la prestigiosa Consultora EDIC

Si bien como ingeniero estaba abocado a desarrollar proyectos hidráulicos, la pasión de Alberto fue estudiar a fondo los problemas que se presentaban en los diferentes proyectos en los que participaba, estando siempre al día en el avance científico y tecnológico. Prueba de ello son sus valiosas contribuciones en los Congresos Nacionales y Latinoamericanos de Hidráulica, de los cuales en lista aparte menciono algunos de ellos, destacándose sus contribuciones relacionadas con el flujo bajo compuertas planas.

En el Instituto Nacional de Hidráulica, entre otros estudios que tuvo a su cargo, fue comisionado para ir a Francia a conocer la aplicación de trazadores radiactivos en estudios sedimentológicos, encabezando el equipo del Instituto que en colaboración con expertos franceses aplicaron esta técnica en el río Valdivia, tanto en el modelo a escala que se hizo en el laboratorio como en el terreno mismo. Alberto nos dirigió y capacitó en este tema, cuya aplicación, entre 1970 y 1971 fue pionera en Chile y que al parecer no ha vuelto a ser aplicada en estudios similares en el país.

En el 2016 el directorio de la SOCHID dio forma a una Comisión cuyo objetivo era preparar una reedición del clásico libro “Hidráulica” de nuestro eminente y recordado Maestro don Francisco Javier Domínguez Solar, para lo cual la Comisión revisaría las últimas ediciones y sugeriría incorporar algunos elementos sustitutivos de las tablas que facilitaban el cálculo cuando este se debía realizar con la hoy abandonada regla de cálculo. Fui comisionado para presidir dicha Comisión y en esa calidad solicité a Alberto su colaboración revisando los capítulos V y VI del citado libro, misión que Alberto cumplió con gran interés y a entera cabalidad.

Haber trabajado con Alberto desde el inicio de nuestra carrera como ingenieros y académicos compartiendo el interés y pasión por la hidráulica, nos permitió consolidar una profunda amistad y compartir intereses personales en otros ámbitos y tuve así la oportunidad de conocer a Alberto más allá de la dimensión profesional, también en la dimensión humana que lo caracterizó y que lo llevó a formar una valiosa familia con Alicia y sus hijos Eduardo y Daniela.

Al despedir a Alberto Sepúlveda Vera, eminente ingeniero, profesor por vocación y gran y buen amigo, lo hago con el convencimiento que la amistad no termina con la separación física de la muerte, sino que se prolonga en el recuerdo y viril sentimiento que queda en el corazón.

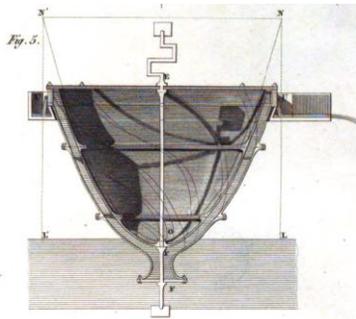
ALGUNAS PUBLICACIONES DEL INGENIERO ALBERTO SEPÚLVEDA VERA

- Empleo de trazadores radiactivos en la calibración sedimentológica del modelo reducido Corral-Valdivia
- Coeficiente de gasto del sistema compuerta de sector-vertedero
- Diseño de un sifón para vaciamiento de estanque
- Coeficiente de gasto de compuertas planas seguidas de torrente
- Determinación de la distribución de velocidades en el plano de rejillas de una bocatoma
- Influencia del número de Reynolds en el coeficiente de compuertas planas seguidas de torrente
- Determinación de la altura de aspereza equivalente en una tubería de rocalit
- Colocación de enrocados de protección mediante socavación controlada
- Fuerza hidrodinámica de cierre de una compuerta ubicada en un túnel a presión:
 - Parte 1: Métodos de cálculo
 - Parte 2: Estudio en modelo
- Métodos de conexión de una bocatoma profunda a un lago
- Flujo transitorio en el sistema túnel-pique conectado a un lago
- Velocidades en el flujo tridimensional: Comparación entre valores calculados (modelo numérico) y medidos en un modelo físico
- Ajuste matemático de curvas convexas verticales en radieres de rápidos de descarga
- Nuevo enfoque para los coeficientes de gasto C_d y de contracción C_c de una compuerta plana con resalto rechazado
- Coeficientes de gasto y de contracción de una compuerta plana con resalto rechazado

HIDRO-GRAFÍA

ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

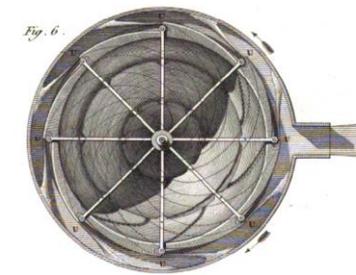
Como es de esperar, la HIDRO-GRAFÍA de este número, está relacionada con Navier y fue tomada del enorme tratado *Architecture Hydraulique* que escribió Bernard Forest de Bélidor. La primera edición del libro fue en 1737 y se constituyó en una de las referencias obligadas de obras hidráulicas por más de un siglo. Considerando su formación en ingeniería, la Académie des Sciences encargó a Navier una edición actualizada del trabajo de Bélidor, la



que fue publicada en 1819. Navier no alteró en nada el texto original, pero sí lo complementó con notas, en tal cantidad que fácilmente constituyen otro texto tan voluminoso como el de Bélidor.

La imagen de la figura corresponde a:

- Un sistema de elevación de agua, la que es aspirada por la toma inferior (F en la figura) y evacuada por la canalización superior
- Un primer diseño de una máquina para determinar la “fricción interna” del agua (viscosidad), a partir del torque necesario para mover las aspas del interior de la máquina
- Una máquina para separar las partículas sólidas y el líquido de una mezcla de manera centrífuga. Las partículas salen por la parte inferior (F en la figura) y el agua clarificada por la canalización superior

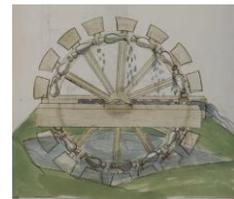


NÚMERO ANTERIOR



La HIDRO-GRAFÍA del número anterior corresponde a un sistema que utiliza una máquina de movimiento perpetuo para elevar agua obtenida del manuscrito de Philipp Mönch de 1496, *Büch der Stryt und Buochßen*. El manuscrito incluye dibujos de máquinas de guerra, de molienda, de construcción, para elevar pesos, puentes portátiles, etc. Entre las máquinas accionadas hidráulicamente se encuentra la presentada en el número anterior, que consiste en un fuelle que aspira agua mediante una tubería vertical, el que está accionado por una rueda que se mueve debido

a parte del caudal que sale del fuelle, mientras otra parte se almacena en la torre. Además de esta máquina imposible de funcionar, el manuscrito incluye otra, que sí funciona, que consiste en una rueda con cántaros o recipientes. La rueda es accionada por la corriente del cauce y los cántaros al sumergirse toman agua, la que es descargada a un canal lateral una vez que ellos comienzan a inclinarse después de pasar el diámetro horizontal de la rueda.



INVITACION A CONTRIBUIR CON ARTÍCULOS

La Revista de la Sociedad Chilena de Ingeniería Hidráulica invita a contribuir con artículos para ser publicados en sus próximos números. Los artículos pueden ser en castellano o inglés.

Los artículos buscan difundir trabajos en las áreas de interés de la Sociedad Chilena de Ingeniería Hidráulica, especialmente aquellos relativos a la hidráulica, hidrología y mecánica de fluidos en general, así como otros aspectos relacionados con el agua, como su uso, gestión, recursos, tecnologías, historia, etc. Los artículos pueden ser de investigación teórica o aplicada, soluciones novedosas a problemas de ingeniería, difusión u otros temas de interés para la comunidad hidráulica nacional.

El formato de presentación de los trabajos puede solicitarse al Editor a la dirección electrónica atamburr@ing.uchile.cl

