

24 Agosto 2021

Presión y velocidad

$$p(\vec{x}) = f(\vec{u}(\vec{x}))$$

ecuación no-local: todo el espacio afecta a p y éste a $\vec{u}$: "eddies lejanos pueden afectarse".

¿ p afecta de igual manera a $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$?

Dinámica de vorticidad

vorticidad $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$: qué es físicamente?

Ej: Fluido 2D $\vec{u} = (u_x, u_y, 0)$, $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$

Elemento circular, radio r y vel. angular Ω

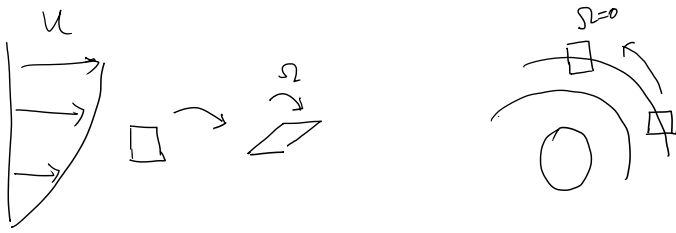
$$\int_S \underbrace{\nabla \times \vec{u}}_{\vec{\omega}} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

$$\omega_z \pi r^2 = \Omega r \cdot 2\pi r$$

$$\omega_z = \frac{\Omega}{2}$$

Se puede generalizar a 3D: $\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$

Rotación " $\neq$ " vorticidad



Los gradientes de velocidad $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nabla \vec{u}$ se

pueden descomponer como una suma de deformación y vorticidad.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= S_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_k\end{aligned}$$

Son procesos diferentes pero no independientes

$$\nabla^2 u_i = 2 \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = -[\nabla \times \vec{\omega}]_i$$

Ambos gradientes están relacionados aunque podemos tener solo contribuciones del uno o del otro.

¿ A qué contribuyen más ?

Tomemos $Q = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \left(S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{2} \omega^2 \right)$

Normalizando, $\Lambda = \frac{S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{2} \omega^2}{S_{ij} S_{ij} + \frac{1}{2} \omega^2} \begin{cases} > 0 : \text{domina la deformación} \\ < 0 : \text{domina la vorticidad} \end{cases}$

otra invariante:

$$R = \frac{1}{3} \left(S_{ij} S_{jk} S_{ki} + \frac{3}{4} \omega_i \omega_j S_{ij} \right)$$

con R y Q se pueden clasificar las contribuciones.

Ecuación de vorticidad

$$\text{identidad: } \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) - \vec{\omega} \times \vec{u}$$

$$(N-S) \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{u} \times \vec{\omega} - \nabla \left(\underbrace{\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}}_C \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad / \nabla \times (\cdot)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \underbrace{\nabla \times \vec{u} \times \vec{\omega}}_{\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega}} - \cancel{\nabla \times \nabla C} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}$$

$\nabla \cdot \vec{u} = 0$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} = \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \underbrace{\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}}_{?} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} //$$

No hay un término con p !

La presión no actúa de la misma manera que sobre $\vec{u}$.

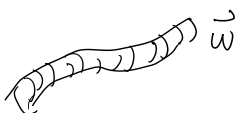
Para entender el significado de $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$,
considerar un espacio de fluido con $\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}$
 $\Rightarrow$ momentum angular $\vec{H} = \frac{1}{2} I \vec{\omega}$

Despreciando las fuerzas de presión (ej: dominio esférico)

$$\frac{DH}{Dt} = \text{torque viscoso} \Leftrightarrow I \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = -\vec{\omega} \frac{DI}{Dt} + 2 \text{ torque viscoso}$$

si la viscosidad es despreciable, $\frac{D}{Dt} (I \vec{\omega}) = 0$

$I\vec{\omega}$ se conserva $\sim$ analogía bailarina

eddy:  $\vec{\omega}$ también se comporta así
"vortex stretching"
estiramiento de vórtices

esto es lo que representa $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$

Caso particular : 2D $\vec{u} = (u_x, u_y, 0)$, $\vec{w} = (0, 0, w_z)$

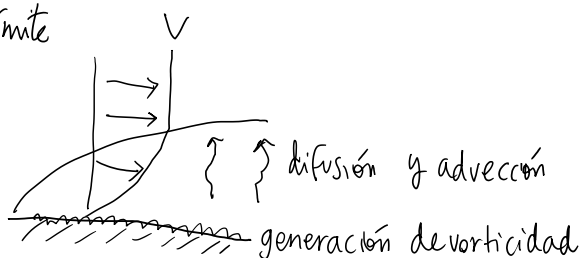
$$\Rightarrow \vec{w} \cdot \nabla \vec{u} = 0$$

Ec. vorticidad : $\frac{D\vec{w}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{w}$: ec. advección
difusión !

No hay término fuente/sumidero: solo se desplaza y difunde en el espacio.

De dónde viene la vorticidad entonces?

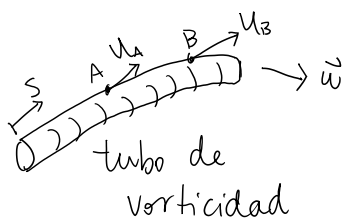
Ej. capa límite



escalas : $\left. \begin{array}{l} \text{difusión } \delta \sim \sqrt{2\nu t'} \\ \text{advección } x \sim Vt' \end{array} \right\} \delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{V}}$
espesor capa límite

Volvamos al caso 3D

$$\frac{D\vec{w}}{Dt} = \vec{w} \cdot \nabla \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{w}$$



$$u_{\parallel} = \vec{u} \cdot \hat{s}$$

$$\vec{w} = w \hat{s}$$

$$\vec{w} \cdot \nabla \vec{u} = |\vec{w}| \frac{du_{\parallel}}{ds}$$

Si $\frac{du_{\parallel}}{ds} > 0$ hay estiramiento

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} > 0 \rightarrow \vec{w} \text{ crece}$$

Otra manera de ver esta contribución es en la ec. de enstrofia : $\frac{w^2}{2}$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{w^2}{2} \right) = \underbrace{w_i w_j S_{ij}}_{\text{estiramiento de vórtices}} - \underbrace{\nu (\nabla \times \vec{w})^2}_{\text{destrucción viscosa}} + \underbrace{\nu \nabla \cdot [\vec{w} \times (\nabla \times \vec{w})]}_{\text{despreciable}}$$

Teorema de Kelvin

- para flujo no viscoso
- "líneas de vorticidad se mueven como si estuvieran congeladas"

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = \text{constante}$$

circulación

$$\text{Stokes} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{en una superficie material} \\ \text{el flujo de vorticidad a} \\ \text{través de ella es constante} \end{array} \right.$$

Discusión

- ecuaciones para $\vec{u}$ y $\vec{\omega}$
- importancia de la presión en N-S pero no en la ec. de vorticidad
- finalmente, $\vec{u}$ y $\vec{\omega}$ se afectan porque $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$

Antes de cerrar, revisemos las ecuaciones en una forma más general:

1) Continuidad : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

2) Navier-Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \rho \cdot \vec{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}$$

$\nwarrow$ fuerzas externas
(e.g. $\vec{g}$)

3) Ec. vorticidad

$$\text{usando } \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nabla \left(\frac{u^2}{2} \right) + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

$$\nabla \times (\text{N-S})$$

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \cancel{\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{u}}_{\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = 0} \right) = -\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \nabla \times \vec{f} + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \right)$$

$$\nabla \times \vec{\omega} \times \vec{u} = \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} - \underbrace{\vec{u} (\nabla \cdot \vec{\omega})}_{\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}} + \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{u}) - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}}_{\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}}$$

* Notamos que $\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{D\vec{\omega}}{Dt} - \frac{1}{\rho^2} \vec{\omega} \frac{D\rho}{Dt}$

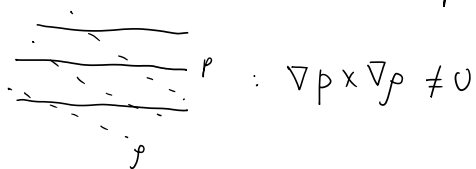
$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \frac{1}{\rho} \cancel{\nabla \times \nabla p} - \frac{1}{\rho^2} \nabla p \times \nabla \rho$$

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} - \frac{\vec{\omega}}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}}_{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} - \frac{\vec{\omega}}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{1}{\rho^2} \nabla p \times \nabla \rho + \nabla \times \vec{f} + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \right)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \underbrace{\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}}_A + \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \nabla p \times \nabla \rho}_B + \underbrace{\nabla \times \vec{f}}_C + \underbrace{\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \right)}_D$$

A: estiramiento de vórtices

B: efectos baroclínicos / no barotrópicos : importante en el caso atmosférico



C: fuerzas no conservativas

D: efectos viscosos