2021 08 27

Naturaleza del caos: introducción (Capítulo 3; Davidson)

- Comportamiento caótico y ecs. no lineales
- Transición al caos
- "Flecha del tiempo" (arrow of time)

No-linealidad y caos

Experimentos clásicos (Taylor y Reynolds)

$\nu \searrow \rightarrow$ aumenta la complejidad

varios valores críticos de R que determinan nuevos estados, eventualmente llegando a un régimen turbulento.

Mencionamos que esta complejidad tiene relación con el término no lineal, sin explicar por qué.

Ejemplo: ecuación logística: (Verhulst, 1845)

$x_n \in (0,1)$

$$x_{n+1} = F(x_n) = a x_n (1 - x_n), \quad 1 < a \leq 4$$

modela el crecimiento poblacional de una especie biológica.

está asociado a una

$$x_{n+1} = F(x_n) \iff \text{EDO}: \quad \dot{x} = G(x)$$

Puntos de equilibrio (fixed points): $x_{n+1} = x_n$

(pueden ser estables o inestables)

para esta ecuación son $x = 0$, $x = (a-1)/a$

estabilidad $\rightarrow$ segunda derivada:

$\rightarrow$ perturbaciones

$\underbrace{}$

base del análisis de estabilidad lineal

$x = 0$: inestable para $a > 1$

$x = (a-1)/a$: estable para $1 < a \leq 3$

inestable para $a > 3$

Para $a > 3$ ocurre algo interesante, aparece una nueva solución: "dos ciclos de F"

$$X_2 = F(X_1) \qquad X_2 = \left(a + 1 \pm \left((a+1)(a-3)\right)^{1/2}\right)/2a$$
$$X_1 = F(X_2)$$

tenemos una solución donde hay 2 puntos de estabilidad y nuestro resultado "oscila" entre ellos. Para sistemas de mayores dimensiones, esto se podría interpretar como un atractor.

Este cambio para $a=3$ se conoce como bifurcación: punto en el cual la organización del sistema cambia

Posteriormente hay otra bifurcación a un 4-ciclos para $a = 3.449$, luego otra $a = 3.544$ (8 ciclos) y así... la secuencia de doblar los ciclos es infinita

Llegamos a varios puntos donde hay tantos estados posibles que podemos interpretar a x como una variable aleatoria.

Para $a=4$ hay una solución analítica: $x_n = \sin^2(2\pi\theta_0)$

Conceptos importantes:

- Sensibilidad a las condiciones iniciales es algo importante en caos.
- De una ecuación no lineal tan simple llegamos a sistemas caóticos que podemos interpretar como aleatorios.
- Podemos describir a x_n mediante sus estadísticas, sintetizando todos estos resultados.

Bifurcaciones / transición a la turbulencia

Landau, 1944: estudiando flujo de Poiseuille

pequeñas perturbaciones: Análisis de estabilidad lineal $\sim Ae^{j\phi}$

$$A(t) = A_0 \exp\left((\sigma + j\underset{\text{frecuencia}}{\omega})t\right) \qquad j = \sqrt{-1}$$

Variando R cerca de R_c (parámetro crítico):

$$\begin{cases} \underbrace{\sigma < 0}_{\text{exp decae}} \quad \text{para } R < R_c : \text{ inestabilidad muere} \\ \underbrace{\sigma > 0}_{\text{exp crece}} \quad \text{para } R > R_c : \text{ inestabilidad crece} \end{cases}$$

Usualmente

$$\sigma^2 = c^2 (R - R_c) + \mathcal{O}\left((R-R_c)^2\right), \quad \underbrace{|R - R_c| \ll R_c}_{\text{pequeñas perturbaciones}}$$

cuando las perturbaciones crecen, este análisis ya no es válido.

Landau sugirió que la magnitud de la perturbación $|A|$ (promediado sobre varios ciclos) está dada por

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\sigma |A|^2 - \alpha |A|^4 - \beta |A|^6 + \dots$$

si $|A|$ es pequeño:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\sigma |A|^2 - \alpha |A|^4 \qquad \text{ec. de Landau (Stuart-Landau)}$$

constante de Landau

según Landa α $\begin{cases} \alpha > 0 : \text{ flujo externo} \\ \alpha < 0 : \text{ tuberías} \\ \alpha = 0 : \text{ análisis lineal } (\sim |A|^4 \text{ se va}) \end{cases}$

La ec. de Landau es similar a la ec. logística

$$\frac{dx}{dt} = dx(1 - ex)$$

tiene una solución exacta:

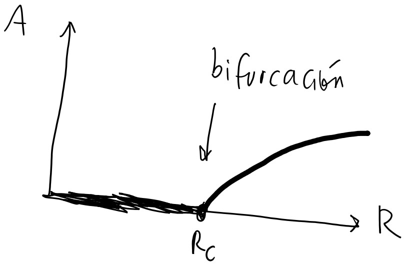
$$\frac{|A|^2}{A_0^2} = \frac{e^{2\sigma t}}{1 + \lambda\left(e^{2\sigma t} - 1\right)}, \quad \lambda = \frac{\alpha A_0^2}{2\sigma}$$

¿cómo se comporta?: ¿puntos de equilibrio?

$\alpha > 0$ {

$R < R_c$: $|A| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$R > R_c$: $|A| \xrightarrow[t\to\infty]{} \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha}} = A_\infty \sim (R-R_c)^{1/2}$



bifurcación supercrítica: solo ocurren cambios para $R > R_c$

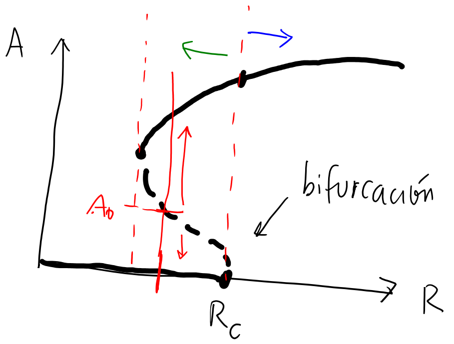
$\alpha < 0$ {

$R > R_c$, $|A| \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$: ec de Landau deja de ser válida, los términos $|A|^6, \ldots$ pueden reestabilizar el sistema

$R < R_c$ {

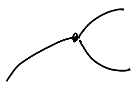
$|A| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ si $A_0 < \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha}}$: pequeña perturbación

$|A| \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ si $A_0 > \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha}}$: gran perturbación



bifurcación subcrítica: pasan cosas para $R < R_c$

Hay otros tipos de bifurcaciones



Pitchfork

→ estados oscilatorios Hopf

Analisis de estabilidad lineal y bifurcaciones ver Drazin (2002)

Flecha de tiempo (arrow of time)

Es el término no lineal en N-S la causa de el coos y mezcla?

Qué pasa con la ec. de Euler:

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}}_{\text{término no lineal!}} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

Las ecs. de Euler son <u>reversibles</u> : no intuitivo

matemáticamente, si invertimos el tiempo en la ecuación, nos queda la misma

En flujos reales, la viscosidad toma importancia y causa efectos como la mezcla turbulenta. En combinación con los efectos del término no lineal son la causa de la irreversibilidad de N-S.

Haciendo una analogía con física estadística, no es imposible volver de un estado mezclado y desornenado, pero la probabilidad de que eso ocurra es muy baja.

arrow of time.

N-S <u>no es reversible</u> en el tiempo. Aunque las fuerzas viscosas sean pequeñas, tienen una importancia fundamental : esfuerzos viscosos.