Departamento de Ingeniería Matemática
MA5802-1 Introducción a los Sistemas Dinámicos y la Teoría Ergódica
Profesores: Sebastián Donoso y Alejandro Maass
Otoño 2024

Auxiliar 4

Mezcla...

Auxiliares : Martín Berríos, Diego Céspedes, Karim Saud

P1. Mezcla fuerte

a) Pruebe que un s.d.a (X, μ, T) es fuertemente mezclador si y solo si para todo A,$B \in S$, con S una semialgebra generadora

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A \cap T^{-k}(B) = \mu(A)\mu(B)$$

Una solución: Veamos la dirección no directa, recoredemos entonces que el álgebra generada por la semi-álgebra está dada por:

$$\mathcal{A} = \{\text{Uniones finitas disjuntas de conjuntos en } S\}$$

Verifiquemos el resultado entonces para conjuntos, $A, B \in \mathcal{A}$ Entonces $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{q} A_i$, $B = \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} B_i$, con A_i, $B_i \in S$, luego

$$\mu(T^{-n}(A) \cap B) = \sum_{i=1}^{q} \mu(T^{-n}A_i \cap B) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{q} \mu(T^{-n}(A_i) \cap B_j)$$

Luego tomando limite, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{q} \mu(A_i)\cdot\mu(B_j) = \mu(A)\cdot\mu(B)$$

Ahora recordamos el lema, que nos dice que si :

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$$

Para todo los borelianos, existe un $A \in \mathcal{A}$, tal que

$$\mu(A\Delta B) < \varepsilon$$

Entonces probemos que es mezcla fuerte, como hay que verlo para dos A ,B borelianos, aproximamos los dos, es decir existen A_0 y B_0, tal que :

$$\mu(A\Delta A_0) < \varepsilon$$
$$\mu(B\Delta B_0) < \varepsilon$$

, luego tratemos de ver que para n grande:

$$|\mu(A \cap T^{-n}(B)) - \mu(A)\mu(B)| < 10\cdot\varepsilon$$

Para ello, observemos que usando la preservación de la medida:

$$\mu(A \cap (T^{-n}(B)\Delta T^{-n}(B_0))) \leq \mu(T^{-n}(B)\Delta T^{-n}(B_0) < \varepsilon$$

Recordando la identidad de teoría de conjuntos

$$A \cap (T^{-n}(B)\Delta T^{-n}(B_0)) = (A \cap T^{-n}(B))\Delta(A \cap T^{-n}(B_0))$$

Se tiene que :

$$\mu(A \cap (T^{-n}(B) \Delta T^{-n}(B_0))) \leq \varepsilon$$

Ahora observamos que para conjuntos arbitrarios D y E :

$$|\mu(D) - \mu(E)| < \mu(D \Delta E)$$

Esto es , pues

$$|\mu(D) - \mu(E)| = |\int (1_D(x) - 1_E(x)) d\mu| \leq \int |(1_D(x) - 1_E(x))| d\mu = \mu(D \Delta E)$$

Entonces se tiene que :

$$|\mu(A \cap T^{-n}(B)) - \mu(A)\mu(B)| \leq |\mu(A \cap T^{-n}(B)) - \mu(A \cap T^{-n}(B_0))| + |\mu(A \cap T^{-n}(B_0)) - \mu(A)\mu(B)|$$

Está ultima cantidad es menor a

$$\varepsilon + |\mu(A \cap T^{-n}(B_0)) - \mu(A)\mu(B)|$$

De la misma forma se demuestra que

$$|\mu(A \cap T^{-n}(B_0)) - \mu(A_0 \cap T^{-n}(B_0))| < \varepsilon$$

Entonces , acotamos:

$$\varepsilon + |\mu(A \cap T^{-n}(B_0)) - \mu(A)\mu(B)| \leq \varepsilon + |\mu(A \cap T^{-n}(B_0)) - \mu(A_0 \cap T^{-n}(B_0))| + |\mu(A_0 \cap T^{-n}(B_0)) - \mu(A)\mu(B)|$$

Dondé lo de la derecha es mas pequeño que

$$2\varepsilon + |\mu(A_0 \cap T^{-n}(B_0)) - \mu(A)\mu(B)|$$

Ahora recordando que para n grande $\mu(A_0 \cap T^{-n}(B_0))$ se parece a $\mu(A_0)\mu(B_0)$, se tiene que :

$$2\varepsilon + |\mu(A_0 \cap T^{-n}(B_0)) - \mu(A)\mu(B)| \leq 2\varepsilon + |\mu(A_0 \cap T^{-n}(B_0)) - \mu(A_0)\mu(B_0)| + |\mu(A)\mu(B) - \mu(A_0)\mu(B_0)|$$

Entonces queda acotar dos terminos, podemos tomar un n grande y concluir que :

$$|\mu(A_0 \cap T^{-n}(B_0)) - \mu(A_0)\mu(B_0)| < \varepsilon$$

Y por otro lado:

$$|\mu(A)\mu(B) - \mu(A_0)\mu(B_0)| = |(\mu(A) - \mu(A_0))\mu(B) - \mu(A_0)(\mu(B_0) - \mu(B))| \leq |\mu(A) - \mu(A_0)| + |\mu(B) - \mu(B_0)| < 2\varepsilon$$

Entonces se tiene que para n grande:

$$|\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B)| < 5\varepsilon$$

Es decir :

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B)$$

b) Pruebe apoyándose de lo anterior, que un shift de Bernoulli es siempre mezclador.

Una solución: Consideremos un shift de Bernoulli con una dirección, i.e

$$X = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$$

con $|\mathcal{A}| < \infty$

Entonces hay que demostrar que los cilindros son mezcladores, tomemos dos cilindros

$$A = [y_0, ...y_n]_0^n$$

$$B = [x_0, ...x_m]_0^m$$

estudiando la preimagen de los cilindros a través del shift, podemos concluir que

$$T^{-1})(B) = [x_0, ...x_m]_1^{m+1}$$

Es decir, ahora el cilindro, *se corrió*, en una coordenada a la derecha, entonces si tomamos un k grande, es decir mayor a n, tendremos que las coordenadas que prescriben los cilindros A y $T^{-k}(B)$, son disjuntas, y como la medida es la producto, se tendrá que para cualquier $k > n$,

$$\mu(A \cap T^{-k}(B)) = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

Entonces se verifica la mezcla, para una álgebra generadora.
Observacion: El caso para el shift de dos direcciones es análogo.

P2. Pruebe que una rotación irracional del círculo no es débilmente mezcladora

Una solución Basta ver que el producto no es ergódico, para ello definimos la función:

$$f(x, y) = x - y$$

Esta función es invariante para la transformación producto, y no es constante.

P3. EL retorno del toro Sea T un endomorfismo del toro:

$$T : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$$

$$x \to Ax(mod1)$$

a) Pruebe que

$$T \text{ es ergódico} \iff A \text{ no tiene como valor propio una raiz de la unidad}$$

Indicación: Pruebe que para un punto $m \in Z^n$, con $m \neq 0$ se tiene que la órbita de m a través de A^t es infinita

Una solución:
Veamos la implicancia de derecha a izquierda Probaremos que para cada $f \in L^2(X, \mu)$, invariante $f \circ T = f$, se tiene que f es constante, para ello recurriremos a las series de fourier, esto se puede hacer, pues los caracteres:

$$e_n(x) = e^{2\pi i n \cdot x} \quad n \in \mathbb{Z}^n, x \in \mathbb{T}^n$$

son una base de Hilbert del espacio $L^2(\mathbb{T}^d, \mu)$, entonces , ocupando esto, para f, se puede escribir como la suma que converge en L^2:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^n} c_n e_n(x)$$

Y además, se tiene que:

$$||f||_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^n} ||c_n||^2 < \varepsilon$$

Por otro lado la expansión de de $f(Tx)$ es:

$$f(Tx) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^n} c_n e_n(Ax)$$

Calculando
$$e_n(Ax) = e^{2\pi i n\cdot Ax} = e^{2\pi i A^T n\cdot x} = e_{A^t n}(x)$$
Como se tiene que $f = f\circ T$ en L^2, las expansiones son iguales:
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^n} c_n e_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^n} c_n e_{A^t n}(x)$$
Entonces, como tenemos unicidad de los coeficientes que multiplican a cada cáracter $e_n(x)$, se tiene que :
En la suma del lado izquierdo, cuando aparece $A^t(n)$, el coeficiente que lo acompaña, es
$$c_{A^t n}$$
Por otro lado cuando aparece en la suma de la derecha, cuando aparec el carácter de indice $A^t(n)$, se tiene que el coeficiente que lo acompaña es :
$$c_n$$
Como se tiene unicidad, se debe tener que para todo $n\in\mathbb{Z}^n$:
$$c_{A^t n} = c_n$$
Tratando de usar lo de arriba, concluiremos que:
$$\forall n\in\mathbb{Z}^n, n\neq(0,0,.,0)\ c_n = 0$$
Para ello, la idea es usar la relación:
$$c_{A^t n} = c_n$$
Ya que si logramos demostrar que para todo $R>0$, existe algún m , tal que
$$|(A^t)^m n| > R$$
Se tendría entonces que :
$$|c_{(A^t)^m n}| < \varepsilon$$
Esto es pues, como la serie es convergente, solo existen finitos términos que son mayores a ε, para ver esto demostraremos la siguiente afirmación:

Prop 1. Para cada $n\in\mathbb{Z}^n$, $n\neq 0$ se tiene que la órbita:
$$\{(A^t)^m(n) : m\in\mathbb{N}\}$$
es infinita.

Demostración. Si la orbita no fuese infinita, sería finita, i.e
$$\{(A^t)^m(n) : n\in\mathbb{N}\} = \{y_1, ..., y_r\}$$
Entonces se tendría que para algun y_i, con $i\in[r]$, existen infinitos m tal que
$$(A^t)^m(n) = y_i$$
En particular hay dos distintos, $m_1 > m_2$, tal que
$$(A^t)^{m_1}(n) = (A^t)^{m_2}(n)$$
Entonces:
$$(A^t)^{m_1-m_2}(n) = n$$
Esto nos dice que 1 es un v.p de
$$(A^t)^{m_1-m_2}$$
Pero los valores propios de $(A^t)^{m_1-m_2}$ son potencias de los valores propios de A^t, esto nos dice que para un valor propio λ de A^t, se tiene que $\lambda^{m_1-m_2} = 1$, es decir hay un valor propio de A^t que es raíz de la unidad, pero esto no puede ocurrir, pues A^t tiene los mismos valores propios que A, es decir llegamos a una contradicción,luego la órbita debe ser infinita. □

Entonces usando la proposición, se tiene que, para cada $n \neq 0$, existe un $m > 0$, tal que

$$|(A^t)^m(n)| > R$$

Esto es pues, solo hay finitos términos en

$$B(0,R) \cap \mathbb{Z}^n$$

Y si la órbita estuviese restringida a $B(0,R) \cap \mathbb{Z}^n$ sería finita, luego .

$$|c_n| = |c_{(A^t)^m(n)}| < \varepsilon$$

.
Ahora para la otra implicancia $\Longleftarrow$: Razonando por contradicción,, si A tuviese un v.p λ que fuese raíz de la unidad, luego A^t tendrían un $v.p$ λ que fuese raíz de la unidad, es decir para algun $r > 0$, $(A^t)^r$ tendría al 1 como v.p, ahora usando la indicación, existiría un n tal que

$$(A^t)^r(n) = n$$

Esto nos dice que la órbita $\{(A^t)^m n\}_{m\in\mathbb{N}}$es finita, por lo tanto es invariante a través de A^t, i.e , si la órbita es :

$$\{n, A^t n, ...(A^t)^{r-1}n\}$$

Se tiene que :

$$A^t\{n, A^t n, ...(A^t)^{r-1}n\} = \{n, A^t n, ...(A^t)^{r-1}n\}$$

Entonces construyendo la función:

$$f = \sum_{k=0}^{r-1} c_{(A^t)^r}(m)$$

Que por lo de arriba es invariante y no constante.

b) Sea (X, μ, T) un .s.d.apruebe que el sistema es mezclador si y solo si, para cualquier base de $L^2(X,\mu)$ $\{f\}_{i\in\mathbb{N}}$, se tiene que para f_i y f_j :

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_i(x) f_j(T^k(x)) d\mu = \int_X f_i d\mu \int_X f_j d\mu$$

Una solución: Una implicancia es directa, para la dirección no trivial, observamos que basta demostrar el resultado para funciones g y h de la forma:

$$g = \sum_{k=0}^{n} c_k f_k$$

Pues estas funciones son densas en $L^2(X,\mu)$, entonces
considerando

$$g = \sum_{k_1=0}^{m} c_{k_1} f_k \wedge h = \sum_{k_2=0}^{m} c_{k_2} f_k$$

Sin perdida de generliadad ambas tiene m terminos (sino se rellenan con 0). Luego

$$\int_X g(x) h(T^n x) d\mu = \sum_{k_1=0}^{m} \sum_{k_2=0}^{m} c_{k_1} c_{k_2} \int_X f_{k_1}(x) f_{k_2}(T^n(x)) d\mu$$

Tomando limite con $n \to \infty$, se tiene que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g(x) h(T^n x) d\mu = \sum_{k_1=0}^{m} \sum_{k_2=0}^{m} c_{k_1} c_{k_2} \int_X f_{k_1} d\mu \int_X g_{k_2} d\mu = \sum_{k_1=0}^{m} c_{k_1} \int_X f_{k_1} d\mu \sum_{k_2=0}^{m} c_{k_2} \int_X g_{k_2} d\mu$$

Y lo de la ultima linea es justamente igual a

$$\int_X g d\mu \cdot \int_X h d\mu$$

$c)$ Pruebe que para un endoformismo del toro se tiene que:

$$T \text{ es ergódico} \iff T \text{ es mezclador}$$

Una solución:
Como hay una dirección que siempre es cierta, solo hay que probar que ergodicidad implica mezcla, para ello usemos los dos resultados previos. Entonces el segundo resultado nos dice que para probar mezcla basta ver que para dos caracteres $e_n(x)$ y $e_m(x)$, con n, $m \in \mathbb{Z}^n$, se tiene que:

$$\lim_{k \to \infty} \int e_n(x) e_m(T^k x) d\mu = \int e_n(x) d\mu \int e_m(x) d\mu$$

Para ello, reescribiendo el lado izquierdo usando la transpuesta, se tiene que:

$$\int e_n(x) e_m(T^k x) d\mu = \int e^{2\pi i x \cdot ((A^t)^k m + n)} d\mu =$$

Esto debiese converger a

$$\int e_n(x) d\mu \cdot \int e_m(x) d\mu$$

Pero en verdad este numero no puede tomar muchos valores, $m = 0$, el lado derecho es $\int e_n(x) d\mu$, y si $m \neq 0$, el lado derecho es 0, entonces viendo los dos casos.

- $m = 0$, en este caso, el lado izquierdo es :

  $$\int_X e^{2\pi i n x} d\mu =$$

  Para todo $k \in \mathbb{N}$, así que se tiene:

- Si $m \neq 0$:, podemos usar el resultado anterior que nos dice que la orbita de un punto no nulo a través de A^t es infinita,para tener que eventualmente $(A^t)^k(m) \neq -n$, el resultado anterior nos dice solo que la orbita es infinita, pero falta ver que una vez se sale de cierta bola de radio, si nunca se vuelve a entrar.

  Es decir , no existen k_1 , k_2, con $k_1 > k_2$, tal que $A^{k_1}(m) = A^{k_2}(m)$, pero observemos que si ocurriese esto , se tendría al igual que en la proposición anterior que A tiene a una raíz de la unidad como v.p, pero esto no puede ocurrir, entonces tenemos que efectivamente para k, grande, siempre se tiene que $(A^t)^k \neq -n$, luego para estos k grande,

  $$\int e^{2\pi x \cdot ((A^t)^k m + n)} = 0$$

  Que es lo que se quería demostrar