Departamento de Ingeniería Matemática
MA5802 Introducción a los Sistemas Dinámicos y a la Teoría Ergódica - Otoño 2024
Profesores: Sebastián Donoso, Alejandro Maass

Auxiliar 3: Ergodicidad

Auxiliares: Martín Berríos, Diego Céspedes, Karim Saud

P1. Considere la rotación en el toro $(\mathbb{T}, R_\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Demuestre que $(\mathbb{T}, R_\alpha)$ es ergódico si y sólo si α es irracional.

(b) Sea $C \subseteq \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ un *rectángulo*: $C = A \times B$ con A, B subconjuntos medibles de $\mathbb{T}$. Pruebe que,

$$m_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}}(C \triangle (R_\alpha \times R_\alpha)^{-1} C) = 0 \implies m_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}}(C) \in \{0, 1\}$$

(c) Demuestre que, a pesar de esto, el producto $(\mathbb{T} \times \mathbb{T}, R_\alpha \times R_\alpha)$ no es ergódico, incluso cuando α es irracional.

P2. Pruebe que si $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ es ergódico entonces toda función $f \in L^1(\mu)$ que cumple $f \leq f \circ T$ c.t.p es necesariamente constante. Dé dos demostraciones distintas:

(a) Usando el Teorema Ergódico de Birkhoff.

(b) **(Propuesto)** Suponiendo que $f \in L^1(\mu)$ satisface $f \leq f \circ T$, pero no es constante, y usando esto para construir un conjunto invariante $B \in \mathcal{B}$ con $\mu(B) \in (0, 1)$.

P3. Considere el toro $\mathbb{T}$ con la medida de Lebesgue y la transformación $x \mapsto bx$ donde $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. En la Auxiliar 1 vimos que para $b = 2$ esta transformación preserva la medida de Lebesgue. Se prueba análogamente que esto vale para cualquier valor de b distinto de cero.

(a) Pruebe que $(\mathbb{T}, b)$ es ergódico.

(b) Utilice el Teorema Ergódico de Birkhoff para deducir el **Teorema de Números Normales de Borel**: Para casi todo $x \in [0, 1)$ la frecuencia de 1's en la expansión binaria de x es $1/2$. Es decir, si escribimos $x = a_1/2 + a_2/2^2 + a_3/2^3 + \cdots$, entonces

$$\frac{1}{N} |\{n \in \mathbb{N} \colon a_n = 1\} \cap \{1, \ldots, N\}| \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{2}$$

(c) **(Propuesto)** Extienda el resultado anterior para una base cualquiera $b \geq 2$.

P4. **(Propuesto)** Sea $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sistema que preserva la medida. Para $E \subseteq X$ definimos el *tiempo de primer retorno* $\rho_E \colon E \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ como

$$\rho_E(x) = \min\{n \geq 1 \colon T^n x \in E\}$$

donde $\rho_E(x) = \infty$ si el conjunto de la derecha es vacío. En este problema probaremos la **Fórmula de Kac**.

Teorema. Si $\mu(E) > 0$, entonces ρ_E es integrable y

$$\int_E \rho_E \, d\mu = \mu(X) - \mu(E_0^*)$$

donde $E_0^* = \{x \in X \colon T^n x \notin E, \text{ para todo } n \geq 0\}$ es el conjunto de puntos que *nunca entran* a E.

Para esto, siga el siguiente esquema:

(a) Sea $E_0 = \{x \in E \colon T^n x \notin E, \forall n \geq 1\}$ y

$$E_n = \{x \in E \colon Tx \notin E, \ldots, T^{n-1}x \notin E, \text{ pero } T^n x \in E\}$$
$$E_n^* = \{x \in M \setminus E \colon Tx \notin E, \ldots, T^{n-1}x \notin E, \text{ pero } T^n x \in E\}$$

Pruebe que estos conjuntos son medibles y por lo tanto ρ_E es medible.

(b) Demuestre que

$$\mu(X) - \mu(E_0^*) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(E_n) + \mu(E_n^*))$$

Concluya que $\mu(E_m^*) \to 0$ cuando $m \to \infty$.

(c) Pruebe que para todo $m > n$,

$$\mu(E_n^*) = \mu(E_m^*) + \sum_{i=n+1}^{m} \mu(E_i)$$

Concluya que $\mu(E_n^*) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(E_i)$.
Indicación: $T^{-1}E_n^* = E_{n+1}^* \cup E_{n+1}$.

(d) Combine partes (b) y (c) para probar que

$$\mu(X) - \mu(E_0^*) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n)$$

y deduzca a partir de esto la Fórmula de Kac.

(e) Verifique que si $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ es ergódico, entonces el tiempo promedio de retorno a E es inversamente proporcional a la medida de E:

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E \rho_E \, d\mu = \frac{\mu(X)}{\mu(E)}$$