Auxiliar 4

Caras, facetas y dimensiones

Profesor: José Soto S.
Auxiliares: Álvaro Márquez S., Paolo Martiniello R.

P1) Irredundancia (existe esa palabra?)

Sea $P(A,b)$ un poliedro con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Una restricción $i \in [m]$ se dice *redundante* si $P(A,b) = P(A_{[m]-i}, b_{[m]-i})$. Si i no es redundante se llama *irredundante*.

Sea i una restricción irredundante del poliedro $P(A,b)$. Se define $F_i := \{x \in P : a_i x = b_i\}$. Demuestre las siguientes proposiciones:

a) F_i contiene un punto $\hat{x}$ tal que $a_j\hat{x} < b$ para todo $j \notin \text{act}(P) \cup \{i\}$

b) $\text{act}(F_i) = \text{act}(P) \cup \{i\}$.

c) $\dim(F_i) = \dim(P) - 1$.

Solución:

a) Es claro que F_i es una cara de P. Por definición de $\text{act}(P)$ existe $\bar{x} \in P$ tal que para todo $j \notin \text{act}(P)$ $a_j\bar{x} < b$ (de hecho, $\bar{x} = \frac{1}{|I^<|}\sum_{i\in I^<} x_i$ cumple lo pedido). Como i es irredundante entonces existe un punto $\tilde{x}$ tal que $a_j\tilde{x} = b$ para $j \in \text{act}(P)$, $a_j\tilde{x} < b$ para $j \in I^< \setminus \{i\}$ y $a_i\tilde{x} > b$. Luego el semiespacio $\{a_i x = b\}$ separa ambos puntos, con lo que existe $\hat{x}$ entre los dos puntos, el cual cumple que $\hat{x} \in P$, $a_i\hat{x} = b$ y $a_j\hat{x} < b$ para $j \in I^< \setminus \{i\}$, con lo que se concluye.

b) ($\subseteq$) Sea $x \in F_i$, luego $x \in P$, por lo que $a_j x = b$ para todo $j \in \text{act}(P)$. Además $a_i x = b$ por definición de F_i, con lo que $\text{act}(x) \subseteq \text{act}(P) \cup \{i\}$.

($\supseteq$) Sea $j \notin \text{act}(P) \cup \{i\}$ y supongamos que j es activa en F_i.
Luego $F_i = \{x \in P : a_i x = b \wedge a_j x = b\} \subsetneq F_i$, lo cual es una contradicción.

c) Para todo poliedro $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene que $\dim Q = n - rg(\text{act}(Q))$. Aplicando esto a F, y usando el resultado anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
\dim F &= n - rg(\text{act}(P) \cup \{i\}) \\
\dim F &= n - (rg(\text{act}(P)) + rg(\{i\})) \\
\dim F &= n - rg(\text{act}(P)) - 1 \\
\dim F &= \dim P - 1
\end{aligned}$$

Donde $rg(\text{act}(P) \cup \{i\}) = (rg(\text{act}(P)) + rg(\{i\}))$ pues la unión es disjunta.

P2) Forma de las facetas

Sea $P(A,b)$ poliedro no vacío con f facetas. Demuestre las siguientes proposiciones:

(i) Para cada faceta F de P existe $j \notin \mathrm{act}(P)$ tal que $a_j x \leq b$ define a F.

(ii) Si P está escrito con su representación minimal, entonces $|I^<| = f$ y las facetas de P son $F_i,\ i \in I^<$, donde $I^< = \{i : a_i x \leq b, i \notin \mathrm{act}(P)\}$.

Solución:

a) Sea F una faceta de P. Luego existe $I \subseteq I^<$ tal que $F = \{x \in P : a_i x = b,\ i \in I\}$. Como $F \neq P$ se tiene que I es no vacío. Para $j \in I$ fijo consideramos $F' = \{x \in P : a_j x = b\}$. Como $j \in I$ se tiene que $F \subseteq F' \subseteq P$, luego por definición de faceta F es una cara maximal para la inclusión se debe cumplir que $F = F'$

b) Como P está escrito con si representación minimal $a_i x \leq b$ es irredundante para todo $i \in I^<$. Por la parte anterior, F_i es faceta, por lo que basta demostrar que para $j,k \in I^<$ distintos se tiene que $F_j \neq F_k$. Por P1 se tiene que existe $\hat{x} \in P$ tal que $a_j \hat{x} = b$ y $a_k \hat{x} < b$, con lo que $F_j \setminus F_k$ es no vacío, con lo que se cumple lo pedido.

Obs: Esto se conoce como el teorema de caracterización de facetas, del cual se desprende que F es faceta de P si y solo si $F \subseteq P$ es no vacío y $\dim F = \dim P - 1$

P3) Dame una D! Dame una I! Dame una M!

El problema de Knapsack 0/1 consiste en seleccionar objetos de tal forma que la suma total de sus pesos no exceda la capacidad máxima que se tiene disponible, maximizando el valor de los objetos elegidos. Si los pesos de los objetos están dados por $a = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n_+$, la capacidad por $\beta \in \mathbb{R}_+$ y los valores $p \in (p_1, \ldots, p_n)^T$ el problema se puede reescribir como $\max p^t x : x \in K^{a,\beta}$, donde

$$K^{a,\beta} = \{x \in \{0,1\}^n : a^T x \leq \beta\}$$

A continuación vamos a considerar los siguientes poliedros:

- $P^{a,\beta} = \mathrm{conv}(K^{a,\beta})$
- $P_{LP} = \{x \in [0,1]^n : a^T x \leq \beta\}$

a) ¿Existe alguna diferencia entre ellos?

b) Calcule la dimensión de cada uno.

c) Describa las facetas de $P^{a,\beta}$ ¿cuántas son?

Solución:

a) Geométricamente, $P^{a,\beta}$ (de ahora en adelante P) es igual a P_{LP} en las coordenadas correspondientes a los objetos que sí caben en la mochila, pero en los objetos que no caben en la mochila P está forzado a que el valor en este punto sea 0, lo cual no ocurre en P_{LP}.

b) Sea $H = \{i \in [n] : a_i > \beta\}$ el conjunto de índices de objetos grandes (que no caben en la mochila). Demostremos que $\dim P = n - |H|$.
Como vimos en la parte anterior, si $i \in H$ entonces $x_i = 0$ para todo $x \in P$, con lo que

$\dim P \leq n - |H|$. Más aún, si $a_i \leq \beta$, entonces $e^i \in P$, con esto se puede verificar que $\{e^i : i \notin H\} \cup \{0\}$ son un conjunto de $n - |H| + 1$ vectores afínmente independientes en P, con lo que $\dim P \geq n - |H|$.
Para la dimensión de P_{LP} notamos que existes $\epsilon > 0$ tal que $\sum_{i=0}^{n} a_i \leq \beta$, con lo que $\{\epsilon e^i, 0\} \in P_{LP}$ y son afinmente independientes, con lo que $\dim P_{LP} = n$.

c) Por lo visto anteriormente, para cada $i \in H$ se tiene que $i \in \mathrm{act}(P)$, por lo que $x_i \geq 0$ no pueden definir una faceta. Por otro lado, si $i \notin H$, los e^ℓ con $\ell \in [n] \setminus (H \cup \{i\})$ y 0 son $n - |H|$ puntos afínmente independientes en P. Como $\dim P = n - |H|$ se tiene, por el teorema de caracterización de facetas, que $x_i \geq 0$ define una faceta.
Veamos que para $i \in [n]$, $x_i \leq 1$ define una faceta si y solo si $i \notin H$ y $a_i + a_j \leq \beta$ para todo $j \in [n] \setminus (H \cup \{i\})$, es decir, si el objeto es lo suficientemente pequeño para que quepa con cualquier otro objeto que no esté en H. Supongamos que $i \notin H$ y $a_i + a_j \leq \beta \ \forall j \in [n] \setminus (H \cup \{i\})$, es claro que e^i y $e^i + e^j$ son $n - |H|$ puntos afínmente independientes (basta restar e^i a cada $e^i + e^j$ y ver que son linealmente independientes) que satisfacen $x_i = 1$, con lo que define una faceta. Para la otra implicancia supongamos que $x_i \leq 1$ define una faceta, luego $i \notin H$ (pues sino $x_i = 0$ para todo $x \in P$). Si $a_i + a_j > \beta$ para algún $j \in [n] \setminus (H \cup \{i\})$ entonces $x_i \leq 1$ está contenida en $x_i + x_j \leq 1$, y por lo tanto es redundante y no puedo definir una faceta, llegando así a la contradicción.

P4) Un poliedro de un grafo

Sea $n \geq 4$, la rueda W_n se define como el grafo (V, E) con $V = \{v_0\} \cup \{v_i : i \in [n]\}$,
$E = \{v_0 v_i : i \in [n]\} \cup \{v_1 v_2, v_2 v_3, \ldots, v_{n-1} v_n, v_n v_1\}$.
Se define el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^E : x(\delta(v)) = 2, \text{ for all } v \in V, 0 \leq x \leq 1\}$

a) Demuestre que todas las desigualdades $x_e \geq 0$ son simultáneamente redundantes.

b) Encuentre n vértices, un punto interno y $2n$ facetas

c) Determine la dimensión de P.

Solución:

a) Para cada $e \in E$, existe un v de grado 3 con $e \in \delta(v) = \{e, f, g\}$, $2 = x(\delta(v)) \geq x_e + x_f + x_g \leq x_e + 2$, de lo que se deduce $x_e \geq 0$. Notar que para esta deducción usamos solo que $x(\delta(v)) \geq 2$ y $x \leq 1$, por lo tanto

$P = \{x \in \mathbb{R}^E : x(\delta(v)) = 2, \forall v \in V,\ x \leq 1\}$

b) Se tiene que los puntos de P en $\{0,1\}^E$ son vértices pues tiene $2n = m$ restricciones activas. Si $x \in P \cap \{0,1\}^E$ entonces P es la indicatriz de un grafo que se particiona en ciclos donde cada vértice pertenece a un ciclo. Como en W_n todo par de ciclos se intersecta en algún vértice, se deduce que x es la indicatriz de un ciclo Hamiltoniano.

Los únicos ciclos Hamiltonianos de W_n son de la forma $C_i := v_1 \ldots v_i v_0 v_{i+1} \ldots v_n v_1$

Luego para cada i; la indicatriz de C_i es vértice de P.

Notamos que las restricciones activas de P incluyen a todas las $x(\delta(v)) \leq 2$ y $-x(\delta(v)) \leq -2$, por otro lado, el punto promedio de los vértices encontrado $\bar{x} = \frac{1}{n}\chi(C_i)$ satisface exactamente esas restricciones activas y ninguna otra. Es decir $\bar{x}$ es punto interno de P.

Respecto a facetas, como hay $m = 2n$ aristas, se puede intentar probar que cada desigualdad $x_e \leq 1$ es irredundante. Para cada $e \in E$, tomemos p^e al vector promedio de las indicatrices de todos los ciclos Hamiltonianos que contienen a e, es decir, si $\mathcal{C}^e := \{C_i \colon e \in C_i\}$ se tiene $p^e = \frac{1}{|\mathcal{C}^e|} \sum_{C_i \in \mathcal{C}^e} \chi(C_i)$. Notamos que las restricciones activas de p^e son exactamente las activas de P y además la restricción $(x_e \leq 1)$ pero para todo $f \neq e$, $p^e_f \in (0,1)$ (esto es pues para cada par de aristas (e,f) existe un ciclo Hamiltoniano que toma a e y evita a f).

Esto implica que $x_e \leq 1$ es irredundante y luego define la faceta $F_e = \{x \in P \colon x_e = 1\}$.

Alternativamente basta encontrar para cada $e \in E$, un punto q^e, con $q^e_e > 1$ pero que satisfaga toda las otras restricciones de P (por ejemplo, para los $e = uv$ externos, tomar q^e como un vector que vale 2 en e y 1 en C con C ciclo que pase por todos los puntos de $V - u - v$).

c) Como todas las indicatrices de los C_i son linealmente independientes, entonces uniendo el 0 tenemos $n+1$ puntos afinmente independientes, luego la dimensión de P es al menos n.

Para ver que la dimensión es n se puede tomar la matriz $A_{act(P)}$ de las restricciones activas en todo P y usar $\dim(P) = m - r(A_{act(P)})$ (pues $m = 2n$ es el espacio ambiente). Es fácil encontrar n columnas l.i. en $A_{act(P)}$ (por ejemplo, las columnas asociadas a las aristas del ciclo externo, cada una participa de 4 restricciones activas $(x(\delta(u)) \leq 2, x(\delta(u)) \geq 2, x(\delta(v)) \leq 2, x(\delta(v)) \geq 2$, entonces son n vectores de la forma (pensando que las primeras 2 coordenadas son las asociadas a $x(\delta(v_0)) \leq 2$ y $x(\delta(v_0) \geq 2$ y luego vienen ordenadas como $x(\delta(v_i)) \leq 2$, $x(\delta(v_i)) \geq 2$ son $(0,0,1,1,1,1,0,...)^T$, $(0,0,0,0,1,1,1,1,...)^T$, ... $(0,0,...1,1,1,1)^T$, luego son n vectores l.i. y entonces $\dim(P) \leq 2n - n = n$.