

Parte A. 1

P1) a) Definimos datos y variables.

$$R = (r_{ij})_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si la región } i \\ & \text{es cubierta por el centro } j \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \quad R \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$C = (C_i)_i \quad \text{costo de implementación del centro } i, C \in \mathbb{R}^n$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se construye} \\ & \text{el centro } i \\ 0 & \text{sino} \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Así el problema es

$$\begin{array}{ll} \min & C^T x \\ \text{s.a.} & R x \geq 1 \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{array} \quad \xrightarrow{\text{abuso notacional}} \quad \sum_{i=1}^m r_{ij} x_i \geq 1 \quad \forall j \in [n]$$

$$b) \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad X = (x_{ij})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si trabajador } i \text{ hace} \\ & \text{el trabajo } j \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$C \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad C = (c_{ij})_{ij} = \text{costo de que el trabajador } i \text{ realice el trabajo } j$$

obs: En ambas matrices filas representan trabajadores y columnas trabajos.

$$\min \sum_{i,j} C_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$$

todo trabajador tiene un  
único trabajo

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$$

todo trabajo es realizado  
por solo una persona

P3) a)  $c^T x^* \leq u^{*T} A x^* \leq u^{*T} b$

Esto pues  $A^T u^* \leq c$  y  $x^* \geq 0$  primero y segundo  
 $Ax^* \leq b$  y  $u^* \geq 0$

Luego, como  $u^*$  es arbitrario  $c^T x \leq W_{LP}$   $\forall x$  factible  
y  $Z_{LP} \leq u^{*T} b$   $\forall u$  factible por el mismo argumento,  
con lo que  $W_{LP} \geq Z_{LP}$  y se concluye lo pedido

b) Por def de  $s$  y  $t$

$$c^T x^* = (u^{*T} A - t^{*T})^T x^*$$

$$c^T x^* = u^{*T} A x^* - t^{*T} x^*$$

$$c^T x^* = u^{*T} (b - s^*) - t^{*T} x^*$$

$$c^T x^* = u^{*T} b - u^{*T} s^* - t^{*T} x^*$$

$$u^{*T} s^* + t^{*T} x^* = 0. \quad \text{Como todos son } \geq 0 \text{ se concluye.}$$

P2]

a) Sean  $x^*$  (P)-factible y  $u^*$  (D)-factible

$$\begin{aligned} c^T x^* &\leq u^{*T} A x^* & / & \text{ Res } A^T u^* \geq c \quad \text{y } x^* \geq 0 \\ &\leq u^{*T} b & / & \text{ Res } A x^* \leq b \quad \text{y } u^* \geq 0 \end{aligned}$$

Como esto es para todo  $x^*, u^*$  factibles en sus respectivos problemas, se tiene que

$$c^T x \leq W_{LP} \quad \forall x \text{ factible en (P)}$$

$$Z_{LP} \leq u^T b \quad \forall u \text{ fact en (D)}$$

$$\Rightarrow Z_{LP} \leq W_{LP}$$

Las demás desigualdades vienen de las definiciones de  $Z_{LP}$  y  $W_{LP}$ .

b)  $c^T x^* = (u^{*T} A + t^{*T}) x^* \quad / \text{ def de } t^* = t(u^*)$

$$c^T x^* = u^{*T} A x^* + t^{*T} x^*$$

$$c^T x^* = u^{*T} (b - s) - t^{*T} x^* \quad / \text{ def de } s^* = s(x^*)$$

$$c^T x^* = u^{*T} b - u^{*T} s - t^{*T} x^*$$

$$0 = u^{*T} s - t^{*T} x^* \quad / \text{ Por dualidad fuerte}$$

$$c^T x^* = b^T u^* \quad \text{Con } x^*, u^* \text{ óptimos}$$

$$\Rightarrow u^{*T} s^* + t^{*T} x^* = 0. \quad \text{Como } u, s, t, x \geq 0$$

Se concluye que  $u^*$  es ortogonal a  $s^*$  y

$x^*$  es ortogonal a  $t^*$ .