MA4001 Cálculo Diferencial Variacional
Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Benjamín Valdés Vera & Fabian Ulloa

Auxiliar 6

Preparación Control 1
26 de abril de 2024

P1. (P6 lista de ejercicios #1) Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, consideramos el espacio de las matrices cuadradas $\mathbb{R}^{n\times n}$. Pruebe que se tiene la siguiente identidad con respecto a la derivada de la función determinante.

$$D(\det)(B)(AB) = \operatorname{tr}(A)\det(B)$$

P2. (P2 lista de ejercicios #2) Sea E Hilbert y $f : [a,b] \to E$ función de clase $\mathcal{C}^1(\overline{(a,b)})$ tal que $f(a) = f(b) = 0$ con $a < b$ y f no constante. Pruebe que existe $u \in [a,b]$ tal que

$$\|Df(u)\| > \frac{4}{(b-a)^2}\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\|$$

P3. (P5 lista de ejercicios #3) Sea H espacio de Hilbert real de dimensión finita. Sea $f : H \to H \in \mathcal{C}^1(H)$ tal que

$$\langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geq 0, \forall x, y \in H$$

$$\frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|} \to \infty, \|x\| \to \infty$$

a) Sea $n \in \mathbb{N}$ y defina $f_n(x) = x + nf(x)$. Pruebe que f_n es difeomorfismo.

b) El objetivo es probar que f es epiyectiva. Reduzca el problema a probar que la ecuación $g(x) = 0$ para toda g con las mismas propiedades de f.

c) Sabemos entonces que para $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in H$ tal que $u_n + nf(u_n) = 0$. Pruebe que $\|u_n\|$ es acotada y concluya.

El arte de hacer matemáticas consiste en encontrar aquel caso especial que encapsula la generalidad
David Hilbert