

P1 consideramos los espacios:

$$A = C([0, 1]; \mathbb{R}) \quad \text{con la norma del supremo}$$

$$B = \{ y \in C^2([0, 1]; \mathbb{R}) \mid y(0) = y(1) = 0 \}$$

en que sobre B consideramos la norma

$$[y] := |y'(0)| + \|y''\|_{\infty} \quad (\forall y \in B).$$

sea $f: B \rightarrow A$ por

$$f(y) = -y'' + y^3$$

(i) Pruebe que $[\cdot]$ es norma equivalente a la
norma de $C^2([0, 1]; \mathbb{R})$. Concluya que $(B, [\cdot])$ es Banach.

Dem: ~~es de~~ sean $u, v \in B, \lambda \in \mathbb{R}$. es directo que

$$1) [u] \geq 0$$

$$2) [\lambda u] = |\lambda| [u]$$

$$3) [u+v] \leq [u] + [v].$$

lo que falta: sea $u \in B$ tal que $[u] = 0$. Luego,
(# $u'(0) = 0$) $\wedge$ ($u''(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$). ②

Per ②: $u(x) = Ax + B$. Pero por ①, $A = 0$. De modo
que $u(x) = B \quad \forall x \in [0, 1]$. Pero como $u \in B, B = 0$.
 $\Rightarrow u \equiv 0$. □

equivalencia:

②

$$a) [u] = |u'(0)| + \|u''\|_\infty$$

$$\leq \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty$$

$$\leq \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty =: \|u\|_{\mathcal{E}^2}.$$

b) Idea: Acotar cosas por $\|u''\|_\infty$.

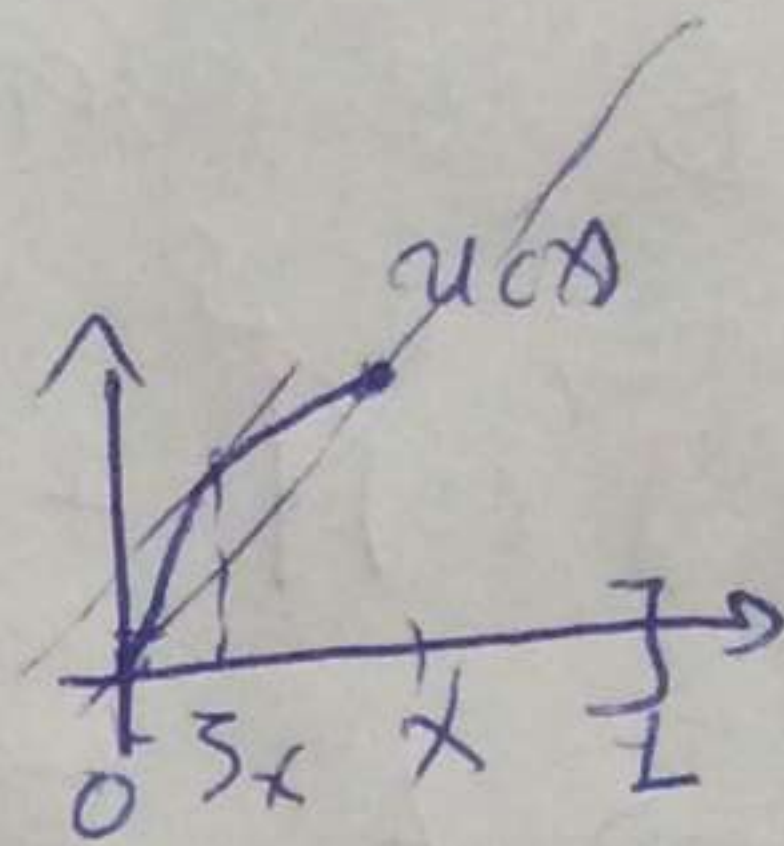
Partamos por $\|u\|_\infty$.

Si $x \in [0, 1]$, por TVM, existe

$\xi_x \in [0, x]$ tal que

$$u(x) = u'(\xi_x) x$$

por $\|u''\|_\infty$.



$$\Rightarrow \|u\| = \sup_{x \in [0, 1]} |x u'(\xi_x)| \leq \|u'\|_\infty$$

$\downarrow$
 ≤ 1 $\leq \|u'\|_\infty$

Ahora, vamos a $\|u'\|_\infty$.

Para $x \in [0, 1]$, existe $\xi_x \in [0, x] \subseteq [0, 1]$ tal que

$$u'(x) - u'(0) = u''(\xi_x) x. \text{ Así,}$$

$$u'(x) = u'(0) + u''(\xi_x) x$$

$$\Rightarrow \|u'\|_\infty \leq |u'(0)| + \|u''\|_\infty. \quad (2)$$

Así, tenemos que

$$\|u\|_{\mathcal{E}^2} = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \|u''\|_\infty$$

$$\stackrel{(1)}{\leq} \|u\|_\infty + 2\|u'\|_\infty \stackrel{(2)}{\leq} \|u''\|_\infty + 2(|u'(0)| + \|u''\|_\infty)$$

$$= 3\|u''\|_\infty + 2|u'(0)| \leq 3(\|u''\|_\infty + |u'(0)|) = 3[u].$$

∴ las normas son equivalentes y se concluye $\square$.

(ii) Pruebe que f es de clase $\mathcal{E}^1$ y calcule $Df(y)$ (3)
 $\forall y \in B$.

Sol: que f es de clase $\mathcal{E}^1$ se tiene por álgebra de funciones $\mathcal{E}^1$.
 Además,

$$\begin{aligned} \langle Df(y), h \rangle &= \langle D[y \mapsto -y^2], h \rangle + \langle D[y \mapsto y^3], h \rangle \\ &\quad \text{(lineal)} \\ &= -h'' + 3y^2 \cdot h \end{aligned}$$

(iii) Probar que $Df(0)$ es biyectiva.

Dem: Veros que $\langle Df(0), h \rangle = -h''$

inyectividad si $h \in B$ es tal que $\langle Df(0), h \rangle = 0$, entonces

$$-h'' \equiv 0 \Rightarrow h(x) = Ax + B \text{ para } x \in [0, 1] \text{ pero}$$

$$\text{como } h \in B, h(0) = h(1) = 0 \Rightarrow h \equiv 0.$$

sobreyectividad: para $v \in \mathcal{K}$ (cualquier función continua),

busco $h \in B$ tal que $\langle Df(0), h \rangle = -h'' = v$.

si definimos

$$h(x) = - \int_0^x \int_0^t v(s) ds dt + x \int_0^1 \int_0^t v(s) ds dt,$$

tenemos lo pedido $\square$.

$\therefore Df(0)$ es biyectiva.

(iv) Pruebe que existe ε_0 tal que para $g \in A$ con $\|g\|_\infty < \varepsilon$,
 existe $z \in B$ con $g = -z'' + z^3$.

Dem. tenemos que $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ simple

(9)

$$(f(0) = 0) \wedge (Df(0) \text{ invertible})$$

Por teo. de inversión local, existe V vecindad abierta de $0 \in \mathcal{B}$, W vecindad abierta de $0 \in \mathcal{A}$ tales que $f: V \rightarrow W$ es invertible. Así, para $\varepsilon > 0$

con $B(0, \varepsilon) \subseteq W$, tenemos que si $\|g\|_\infty \leq \varepsilon$, entonces existe $z \in V \subseteq \mathcal{B}$ con $g = f(z) = -z'' + z^3$ $\square$.

7.3 (Teorema de Banach)

⑤

Sea $A: E \rightarrow F$ una aplicación lineal continua biyectiva con E, F Banach. pruebe que es isomorfismo.

Dem: Lo que hay que probar es que $A^{-1}: F \rightarrow E$ es acotada. En virtud del teorema de la aplicación abierta, se sabe que A es abierta, al ser lineal acotada sobre vector. Así, para U abierto en E , $A(U)$ abierto en F . con ello, vemos la continuidad de $A^{-1}: F \rightarrow E$ de forma clásica: sea V abierto en E . Entonces

$$(A^{-1})^{-1}(V) = A(V) \text{ abierto en } F$$

$\Rightarrow A^{-1}$ continua $\square$.