

MA4002 Cálculo Diferencial Variacional**Profesora:** Carlos Conca**Auxiliares:** Benjamín Valdés Vera & Fabian Ulloa

Auxiliar 4

Teoremas de Inversión Local

12 de Abril de 2024

P1. Considere los espacios $\mathcal{A} = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ con la norma del supremo, y $\mathcal{B} = \{y \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid y(0) = y(1) = 0\}$ dotado de la norma:

$$[y] = |y'(0)| + \|y''\|_\infty$$

Considere la función $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ dada por

$$f(y) = -y'' + y^3$$

- Pruebe que $[\cdot]$ es una norma. Pruebe que es equivalente a la norma usual de $\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ en \mathcal{B} . Concluya que $(\mathcal{B}, [\cdot])$ es un espacio de Banach.
- Pruebe que f es de clase \mathcal{C}^1 y calcule su diferencial.
- Pruebe que $Df(0)$ es isomorfismo.
- Concluya un resultado sobre las soluciones a la ecuación diferencial

$$-z'' + z^3 = g$$

En que g satisface $\|g\|_\infty < \epsilon$

P2. (Teorema de Banach) Sea $A : E \rightarrow F$ una aplicación lineal continua biyectiva entre dos espacios de Banach, pruebe que es un isomorfismo.