Departamento de Ingeniería Matemática
MA4002 Cálculo Diferencial Variacional
Profesor: Juan Peypouquet U.
Auxiliar: Felipe Lopecillo Rocabado

Diferenciabilidad del operador que invierte un funcional lineal

Sea E un espacio de Banach, y considere $X = \mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$, es decir, el espacio de automorfismos de E.
La idea de este problema es estudiar la función $A \to A^{-1}$, la cual resultará ser importante posteriormente. Para esto, iremos haciendo el paralelo con la función real $x \to x^{-1}$, pues para muchos resultados las demostraciones son similares.
Sin embargo, antes de poder estudiar este operador tenemos que verificar que esté bien definido. Para esto, necesitamos que su dominio sea abierto. Este resultado, es decir, que los funcionales invertibles definen un conjunto abierto, también será importante más adelante.

a) Sea $H \in X$ tal que $\|H\| < 1$. Pruebe que $I - H$ es invertible, y que además:

$$\|(I-H)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|H\|}$$

Respuesta: Vamos al caso real para entender la pregunta. Si consideramos x tal que $|x| < 1$, tenemos claramente que $1 - x$ es invertible, es más:

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = \sum_{k\in\mathbb{N}} x^k$$

De esta manera, proponemos como candidato a inversa de $I - H$ a:

$$C = \sum_{k\in\mathbb{N}} H^k$$

Sin embargo, hay un problema con este candidato: no sabemos si está bien definido. Verifiquemos que es una sucesión de Cauchy. Sean $\varepsilon > 0$ y $n, m \in \mathbb{N}$, con $m > n$. Entonces

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{m} H^k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|H^k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|H\|^k \leq \varepsilon$$

pues como $\|H\| < 1$ la serie asociada al último término es convergente y por tanto de Cauchy. Luego, C está bien definido.
Una observación es que en el desarrollo anterior usamos que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. En efecto:

$$\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\| \; \forall x \in B(0,1) \Rightarrow \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

Ahora verifiquemos que es la inversa. Tenemos que:

$$C \circ (I-H) = \sum_{k\in\mathbb{N}} H^k(I-H) = \sum_{k\in\mathbb{N}} H^k - \sum_{k\in\mathbb{N}} H^{k+1} = I + \sum_{k\in\mathbb{N}} H^{k+1} - \sum_{k\in\mathbb{N}} H^{k+1} = I$$

Y como análogamente se tiene lo mismo para $(I - H) \circ C$ se concluye que efectivamente C es la inversa de $(I - H)$.
La desigualdad viene directo del hecho que:

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{N}} H^k\right\| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \|H\|^k = \frac{1}{1-\|H\|}$$

b) Sea $A \in X$ un funcional invertible. Pruebe que si $\|H\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, entonces $A + H$ es invertible, y además:

$$\|(A+H)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}H\|}$$

Concluya que el conjunto $U = \{A \in X \mid A \text{ es invertible}\}$ es abierto.

Respuesta: Ocupando la parte anterior, esto sale muy fácilmente.
Observemos que:

$$A + H = A(I + A^{-1}H) = A(I - (-A^{-1}H))$$

De este modo, por la parte anterior basta que $\| - A^{-1}H\| < 1$ para que $A + H$ sea invertible. Observando además que:

$$\| - A^{-1}H\| \leq \|A^{-1}\|\|H\|$$

se concluye que si $\|H\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ entonces $A + H$ es invertible, y además:

$$\|(A+H)^{-1}\| = \|(A(I - (-A^{-1}H)))^{-1}\| = \|(I - (-A^{-1}H))^{-1}A^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}H\|} \cdot \|A^{-1}\|$$

por la parte anterior, de donde se concluye la desigualdad pedida.
Ver que entonces el conjunto U es abierto es directo. Sea $A \in U$. Considerando $r = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, por lo recién probado tenemos que $B(A, r) \subseteq U$ y por lo tanto U es abierto.

c) Considere la función $J : U \subseteq X \to X$ dada por:

$$J(A) = A^{-1} \; \forall A \in U$$

Pruebe que J es continua.

Respuesta: Claramente J está bien definida, puesto que U corresponde exactamente a su dominio. Para ver que es continua, pensaremos nuevamente en la función real x^{-1}. Para $x \neq 0$ y $x_n \to x$, tenemos que, para probar que $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$ se usa el hecho que:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x - x_n}{x_n \cdot x}\right| = \underbrace{\frac{1}{|x_n|}}_{\text{acotado}} \cdot \underbrace{\frac{1}{|x|}}_{\text{constante}} \cdot \underbrace{|x - x_n|}_{\to 0}$$

Tratemos de hacer lo mismo para J. Sea $A \in U$ y sea $(A_n)_n \subseteq U$ tal que $A_n \to A$. Queremos ver que $J(A_n) \to J(A)$. Si tratamos de hacer lo mismo que en el caso real, tendríamos que:

$$\|J(A_n) - J(A)\| = \|A_n^{-1} - A^{-1}\|$$

El problema es que acá sacar denominador común no es directo. Sin embargo, se puede hacer algo similar: factorizar. Esto es puesto que, si por ejemplo factorizamos A_n^{-1} por la izquierda, obtenemos $A_n^{-1} - A^{-1} = A_n^{-1}(I - A_nA^{-1})$, y si factorizaramos A^{-1} por la derecha, entonces obtenemos:

$$\|J(A_n) - J(A)\| = \|A_n^{-1}(A - A_n)A^{-1}\| \leq \|A_n^{-1}\| \underbrace{\|A - A_n\|}_{\to 0} \underbrace{\|A^{-1}\|}_{\text{constante}}$$

La razón por la que tuvimos que factorizar uno de los elementos por la izquierda y el otro por la derecha es porque la composición no es conmutativa.

Ahora, si lograramos probar, al igual que en el caso real, que $\|A_n^{-1}\|$ está acotada, estamos listos. Para esto, pensemos por qué $\frac{1}{|x_n|}$ estaba acotada. La razón es que, como x_n está cerca de x y $x \neq 0$, de ahí uno puede sacar las cotas con valores cercanos a $\frac{1}{x}$ al considerar ε suficientemente chico. Si queremos hacer lo mismo para A_n^{-1}, tendremos que usar el hecho que A_n está cerca de A. ¿Cómo podemos acotar algo que está cerca de algún $A \in U$? La respuesta está en la parte b), pues ahí tenemos derechamente una cota para estos casos. Simplemente hay que considerar $H = A_n - A$, y de esta manera, para n suficientemente grande:

$$\|A_n^{-1}\| = \|(A + (A_n - A))^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(A_n - A)\|}$$

Y de esta manera:

$$\|J(A_n) - J(A)\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(A_n - A)\|}\|A^{-1}\|\|A - A_n\| \leq C\|A - A_n\|$$

puesto que $\frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}(A_n-A)\|}$ converge a $\|A^{-1}\|$ y por lo tanto está acotada.
Así, J es continua.

d) Pruebe que J es $\mathcal{C}^1$ y calcule su diferencial.

Respuesta: Nuevamente, veamos primero el caso real. Para $x \neq 0$ tenemos que:

$$\frac{(x+h)^{-1} - x^{-1}}{h} = \frac{x - (x+h)}{(x+h)x \cdot h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = \frac{-1}{x(x+h)} \underbrace{\Rightarrow}_{h \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

Para J trataremos de hacer algo similar. Como no tenemos un candidato a diferencial claro, usaremos derivada de Gâteaux. Sea $A \in U$, $H \in X$ y t suficientemente chico. Así:

$$\begin{aligned}\frac{J(A+tH) - J(A)}{t} &= \frac{(A+tH)^{-1} - A^{-1}}{t} = \frac{(A+tH)^{-1}(A - (A+tH))A^{-1}}{t} \\ &= \frac{(A+tH)^{-1}(-tH)A^{-1}}{t} = -\underbrace{(A+tH)^{-1}}_{J(A+tH)} HA^{-1}\end{aligned}$$

Así, tomando límite cuando $t \to 0$ y por continuidad de J:

$$D_G J(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}$$

Claramente es lineal. Además, es continua pues:

$$\| - A^{-1}HA^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|^2\|H\|$$

Con esto ya tenemos a nuestro candidato. Veamos ahora que efectivamente es el diferencial. Para esto, veamos que se cumple que:

$$\|J(A+H) - J(A) - D_G(A)(H)\| = o(H)$$

Probémoslo:

$$\begin{aligned}\|J(A+H) - J(A) - D_G(A)(H)\| &= \|(A+H)^{-1} - A^{-1} - (-A^{-1}HA^{-1})\| \\ &= \|(A+H)^{-1}(A - (A+H) + (A+H)A^{-1}H)A^{-1}\| \\ &= \|(A+H)^{-1}(-H + H + HA^{-1}H)A^{-1}\| = \|(A+H)^{-1}HA^{-1}HA^{-1}\| \\ &\leq \|(A+H)^{-1}\|\|A^{-1}\|^2\|\|H\|^2 \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|^3\|H\|^2}{1 - \|A^{-1}H\|} = o(H)\end{aligned}$$

donde la última desigualdad viene de la parte b) para H con norma suficientemente pequeña. Así, efectivamente nuestro candidato es el diferencial y así:

$$DJ(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}$$

Finalmente, solo falta ver que es $\mathcal{C}^1$, es decir, que la función:

$$DJ : U \subseteq X \to \mathcal{L}(X, X)$$

es continua. Sea $A \in U$ y sea $(A_n)_n \subseteq U$ tal que $A_n \to A$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\|DJ(A_n) - DJ(A)\|_{\mathcal{L}(X,X)} &= \sup_{\|H\|\leq 1} \|DJ(A_n)(H) - DJ(A)(H)\| \\
&= \sup_{\|H\|\leq 1} \|-A_n^{-1}HA_n^{-1} - (-A^{-1}HA^{-1})\| \\
&= \sup_{\|H\|\leq 1} \|A^{-1}HA^{-1} - A^{-1}HA_n^{-1} + A^{-1}HA_n^{-1} - A_n^{-1}HA_n^{-1}\| \\
&\leq \sup_{\|H\|\leq 1} \|A^{-1}H(A^{-1} - A_n^{-1})\| + \|(A^{-1} - A_n^{-1})HA_n^{-1}\| \\
&\leq \sup_{\|H\|\leq 1} \|A^{-1}\|\|H\|\|A^{-1} - A_n^{-1}\| + \|A^{-1} - A_n^{-1}\|\|H\|\|A_n^{-1}\| \\
&\leq C\|A^{-1} - A_n^{-1}\| = C\|J(A) - J(A_n)\|
\end{aligned}$$

donde la constante C viene del hecho que $\|A_n^{-1}\|$ es acotada (visto en parte c)), $\|A^{-1}\|$ es constante y $\|H\| \leq 1$ por el supremo.
Con todo esto, por continuidad de J, se concluye que DJ es continua y por lo tanto J es $\mathcal{C}^1$.