

9.1 E Hilbert. $u \in L(E)$. consideramos el $\textcircled{I}$
 operador $g(x) = \langle u(x), x \rangle \in \mathbb{R}$

a) Diferenciabilidad por definición.

$$g(a+h) = \langle u(a+h), a+h \rangle = \langle u(a) + u(h), a+h \rangle$$

$$= \langle u(a), a \rangle + \langle u(a), h \rangle + \langle u(h), a \rangle + \langle u(h), h \rangle$$

$$= g(a) + \underbrace{\langle u(a), h \rangle + \langle u(h), a \rangle}_{\text{ES Lineal con } h} + \langle u(h), h \rangle.$$

$$|L(h)| = |\langle u(a), h \rangle + \langle u(h), a \rangle| \leq |\langle u(a), h \rangle| + |\langle u(h), a \rangle|$$

$$\leq \|u(a)\|_E \|h\|_E + \|u\|_{L(E)} \|h\|_E \|a\|_E = (\|u(a)\| + \|u\| \|a\|) \|h\|$$

$\hookrightarrow$ continuo. $\square$

queda ver que $\langle u(h), h \rangle$ es $o(\|h\|)$, es decir,

$$|\langle u(h), h \rangle| \leq \|u\| \|h\|^2 \quad \square$$

entonces, es diferenciable en todo a con

$$Dg(a)h = \langle u(a), h \rangle + \langle u(h), a \rangle.$$

b) Diferencial con ~~estas~~ propiedades.

si $g_2(x, y) = \langle x, y \rangle \quad (E \times E \rightarrow \mathbb{R})$, entonces

$$g(x) = g_2(u(x), x). \quad \text{En que}$$

$\rightarrow u$ diferenciable con

$\rightarrow g_2$ diferenciable con

$$Dg_2(a)h = \langle a_1, h_1 \rangle + \langle a_2, h_2 \rangle$$

$$Da_1(a) = u \quad (Du(a), h) = u(h).$$

Por cada a

~~$Dg(a) =$~~

~~$Dg(a) = Dg_2(\quad)$~~

Consideramos además la función

$$X \xrightarrow{g_2} (u(x), x) \quad (x \rightarrow x \in E)$$

$$g_2(x+y) = (u(x+y), x+y)$$

$$= (u(x) + u(y), x+y) = (u(x), x) + (u(y), y)$$

entonces la función es lineal:

$$Dg_2(a) = g_2$$

y escribimos g como

$$g(x) = g_1(g_2(x))$$

$$\Rightarrow Dg(a) = Dg_1(g_2(a)) \circ Dg_2(a)$$

$$\langle Dg(a), h \rangle = \langle Dg_1(g_2(a)), Dg_2(a)h \rangle$$

$$= \langle Dg_1(g_2(a)), g_2(h) \rangle$$

$$= \langle Dg_1(u(a), a), (u(h), h) \rangle$$

$$= \langle u(a), h \rangle + \langle u(h), u(a) \rangle \quad \square$$

P2 (operador de invertir funcional)

①

Sean E, F espacios de Banach. Consideremos $GL(E, F)$ el conjunto de ~~auto~~ isomorfismos de E en F .

a) Probar que $GL(E, F)$ es abierto en $L(E, F)$.

Dem: sea $u \in GL(E, F)$. Basta probar que para $h \in L(E, F)$ suficientemente pequeño se tiene que $u + h$ es invertible. Para lo cual basta ver que

$$u^{-1} \circ (u + h) = \text{id}_E + u^{-1}h$$

es invertible. Esto corresponde a una perturbación de la identidad. Por lo que sería bueno tener un resultado de que perturbaciones pequeñas de la identidad siguen siendo invertibles.

lema: si $u \in L(E, F)$ cumple $\|u\| < 1$, entonces $I_E - u$ es invertible con

$$\|(I - u)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|u\|}.$$

⌈ Haciendo analogía con los reales, tendríamos que $1 - x$ es invertible para todo $|x| < 1$, y tenemos

$$(1 - x)^{-1} = \frac{1}{1 - x} = \sum_{k \in \mathbb{N}} x^k \quad \sqcap$$

candidato: $C = \sum_{k \in \mathbb{N}} u^k$

Notar: C está bien definido porque la serie (2)

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} u^k \right\| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \|u^k\| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \|u\|^k = \frac{1}{1 - \|u\|}$$

es abs. convergente. Así, $C \in L(E; F)$.

problemas que es la inversa que queremos

$$C \circ (I - u) = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} u^k \right) \circ (I - u)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} u^k \circ (I - u) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (u^k - u^{k+1})$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} u^k - \sum_{k \in \mathbb{N}} u^{k+1} = I \quad \square$$

b) consideramos ahora $\varphi(u) = u^{-1}$, probar que
y es continua.

¿cómo se prueba esto en los reales?

si $x_m \rightarrow x \neq 0$, veros que

$$\left| \frac{1}{x_m} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{x - x_m}{x_m \cdot x} \right| = \underbrace{\frac{1}{|x_m|}}_{\text{acotado}} \cdot \underbrace{\frac{1}{|x|}}_{\text{acotado}} |x - x_m| \rightarrow 0$$

si $u \in GL(E; F)$ y $u_m \in GL(E; F) \rightarrow u$, tenemos que

$$\|\varphi(u_m) - \varphi(u)\| = \|u_m^{-1} - u^{-1}\| = \|u_m^{-1} - u_m^{-1} u u^{-1}\|$$

$$= \|u_m^{-1} \circ (I - u u^{-1})\| = \|u_m^{-1} \circ (u \circ u^{-1} - u_m \circ u^{-1})\|$$

$$= \|u_m^{-1} \circ (u - u_m) \circ u^{-1}\| \leq \|u_m^{-1}\| \cdot \|u - u_m\| \cdot \|u^{-1}\|$$

teremos que $\|u^{-2}\|$ es cte y $\|u_n - u\| \rightarrow 0$

③

Además,

$$\|u_n^{-2}\| \leq \| (u - (u - u_n))^{-2} \|$$

$$\leq \|u\| \cdot \|u\| = \| (u \circ (I - u^{-2} \circ (u - u_n)))^{-2} \|$$

$$\| (I - u^{-2} \circ (u - u_n))^{-2} \circ u^{-2} \|$$

$$\leq \| (I - u^{-2} \circ (u - u_n))^{-2} \| \|u^{-2}\|$$

$$\leq \frac{1}{1 - \|u^{-2} \circ (u - u_n)\|} \cdot \|u^{-2}\|$$

Resumiendo,

$$\|\varphi(u_n) - \varphi(u)\| \leq \|u^{-2}\|^2 \cdot \frac{1 \cdot \|u - u_n\|}{1 - \|u^{-2} \circ (u - u_n)\|} \rightarrow 0.$$

↪ acotada $\square$.

c) probar que φ es diferenciable con

$$\langle D\varphi(u), h \rangle = \frac{-u^{-2} \circ h \circ u^{-2}}{L(h)} \rightarrow \text{es lineal y continua.}$$

Dem: Basta ver que

$$\|\varphi(u+h) - \varphi(u) - L(h)\| \text{ es } o(\|h\|).$$

veamos que

$$\|\varphi(u+h) - \varphi(u) - L(h)\| = \|(u+h)^{-2} - u^{-2} + u^{-2} \circ h \circ u^{-2}\|$$

$$= \|(u+h)^{-2} \circ u - I_d + u^{-2} \circ h) \circ u^{-2}\|$$

$$= \|(u+h)^{-2} \circ (u - (u+h) + (u+h) \circ u^{-2} \circ h) \circ u^{-2}\|$$

$$= \|(u+h)^{-2} \circ (-h + (u+h) \circ u^{-2} \circ h) \circ u^{-2}\|$$

$$= \| (u+h)^{-2} \circ (-h + h + h \circ u^{-2} \circ h) \circ u^{-2} \| \quad (4)$$

$$= \| (u+h)^{-2} \circ h \circ u^{-2} \circ h \circ u^{-2} \|$$

$$\leq \| (u+h)^{-2} \| \| h \|^2 \| u^{-2} \|^2$$

$$\leq \frac{\| u \|^3}{1 - \| u^{-2} \circ h \|} \cdot \| h \|^2 = o(h)$$

□.