

P1) $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e.d.m., $(Y, \mathcal{G})$ e.m., $\psi: X \rightarrow Y$ medible.

Definimos en $(Y, \mathcal{G})$ la medida $\lambda(B) := \mu(\psi^{-1}(B))$.

a) Pruebe que λ es medida [propuesto]

b) Pruebe que $\forall f$ medible positiva en $(Y, \mathcal{G}, \lambda)$

$$\int_Y f \, d\lambda = \int_X f \circ \psi \, d\mu$$

Lo probaremos usando escalamiento, un método de demostración que se basa en partir de funciones sencillas, y de ahí ir extrapolando a clases más complicadas.

Comenzamos por las indicatrices de ejtos medibles:

Sea $B \in \mathcal{G}$:
$$\int_Y \mathbb{1}_B \, d\lambda = \lambda(B) = \mu(\psi^{-1}(B))$$

 $f = \mathbb{1}_B$

$$= \int_{\psi^{-1}(B)} d\mu = \int_X \mathbb{1}_{\psi^{-1}(B)} \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_B \circ \psi \, d\mu$$

Donde la última igualdad es pues: $\mathbb{1}_{\psi^{-1}(B)}^{(x)} = 1$

$$\Leftrightarrow x \in \psi^{-1}(B) \Leftrightarrow \psi(x) \in B \Leftrightarrow \mathbb{1}_B(\psi(x)) = 1$$

Ahora, para las funciones simples positivas.

(2)

Sea $f := \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{B_i} \cdot b_i$ con $b_i \geq 0$ y B_i disjuntos.

Vemos que:

$$\int_Y f d\mu = \int_Y \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{B_i} \cdot b_i d\mu = \sum_{i=1}^n b_i \int_Y \mathbb{1}_{B_i} d\mu$$

linealidad de la integral

$= \sum_{i=1}^n b_i \int_X \mathbb{1}_{B_i} \circ \ell d\mu$ (caso anterior) $= \int_X \sum_{i=1}^n b_i (\mathbb{1}_{B_i} \circ \ell) d\mu$

$= \int_X \left(\sum_{i=1}^n b_i \mathbb{1}_{B_i} \right) \circ \ell d\mu$

Donde la última igualdad es por linealidad de la composición.

Para las $f \in M^+$ generales, recordemos que $\forall f \in M^+$ $\exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_+$ (las simples positivas) tal que

$f_n \nearrow f$ puntualmente. Esto nos indica que

podríamos intentar usar TCM.

Notemos: $\left. \begin{aligned} & \bullet f_n \in M^+ \Rightarrow f_n \circ \ell \in M^+ \\ & \bullet f_n \nearrow f \Rightarrow f_n \circ \ell \nearrow f \circ \ell \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Propuesto:} \\ \text{chequear.} \end{array}$

puntualmente puntualmente.

Con ello, por TCM: $\int f_n \rightarrow \int f_0$ (3)

Esto significa que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu$$

$\int_X f_n \, d\mu$ por caso anterior. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ por lo visto en la parte propuesta.

Es decir:

$$\int_X f_0 \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y f_n \, d\mu \stackrel{\substack{\text{por def. de} \\ \text{integral.}}}{=} \int_Y f \, d\mu$$

y con ello se concluye lo pedido. $\square$

P2 Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e.d.m.

(4)

a) Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ sucesión de eventos, $\mu(A_n) \downarrow 0$.

Sea $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$. Probar $\int_{A_n} f d\mu \rightarrow 0$.

Recordemos que

$$\int_{A_n} f d\mu := \int_X f \cdot \mathbb{1}_{A_n} d\mu.$$

Siendo que queremos estudiar $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f \cdot \mathbb{1}_{A_n} d\mu$,
no tenemos monotonicidad para $(f \cdot \mathbb{1}_{A_n})_n$.

y $|f \cdot \mathbb{1}_{A_n}| \leq |f| \in L^1$ (pues $f \in L^1 \Leftrightarrow |f| \in L^1$)

Concluimos que nos interesa usar TCD
(CTP's version)
Con ello, chequeamos hipótesis:

• $f \cdot \mathbb{1}_{A_n} \rightarrow 0$ puntualmente (CTP) pues

$$f \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A_n \\ f(x) & \text{si } x \in A_n \end{cases} \quad \text{y } \mu(A_n) \rightarrow 0$$

En otras palabras:

$$\{x \in X : f \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x) \not\rightarrow 0\} \subseteq \{x \in X : x \in A_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow \text{tiene medida cero.}$$

• $(f \cdot \mathbb{1}_{A_n}) \in L'$ en efecto: $|f \cdot \mathbb{1}_{A_n}| = |f| \cdot \mathbb{1}_{A_n} \leq |f|$
 $\in L'$

con ello $|f \cdot \mathbb{1}_{A_n}| \in L'$, y así, $f \cdot \mathbb{1}_{A_n}$ también.

• Dominancia. como mencionamos al inicio:

$$|f \cdot \mathbb{1}_{A_n}| \leq |f| \quad \text{con } f \in L'.$$

Así, tenemos todo para usar TCD, lo cual nos dice que:

$$\int f \cdot \mathbb{1}_{A_n} d\mu \longrightarrow \int 0 d\mu = 0$$

$$\int_{A_n} f d\mu$$

con lo que se
concluye lo pedido $\square$

b) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M_+$ $\nrightarrow$ $f_n \rightarrow f$ puntualmente y ⑥

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu < \infty.$$

P.D.Q. $\forall A \in \mathcal{F} \quad \int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu.$

Notemos que no tenemos hipótesis de monotonía, ni indicios de dominancia, por lo que sólo queda usar Fatou. Chequemos hipótesis:

• $\forall n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{F} : f_n \cdot \mathbb{1}_A \in M_+$

con ello:

$$\int \liminf_n f_n \cdot \mathbb{1}_A d\mu \leq \liminf_n \int f_n \cdot \mathbb{1}_A d\mu$$

$$\int \lim_n f_n \cdot \mathbb{1}_A d\mu = \int f \cdot \mathbb{1}_A d\mu$$

i.e. $\int_A f d\mu \leq \liminf_n \int f_n \cdot \mathbb{1}_A d\mu$
 $\leq \limsup_n \int f_n \cdot \mathbb{1}_A d\mu$

Notando que, como $\lim_n \int f_n d\mu < \infty$, entonces $\int f_n d\mu < \infty$ $\forall n$ a partir de algún n_0 , se puede escribir:

$$\int_A f_n d\mu = \int_X f_n d\mu - \int_{A^c} f_n d\mu.$$

con ello:

$$\int_A f \, d\mu \leq \limsup_n \int_A f_n \, d\mu = \limsup_n \left(\int_X f_n \, d\mu - \int_{A^c} f_n \, d\mu \right) \quad \textcircled{a}$$

$$\leq \limsup_n \int_X f_n \, d\mu + \limsup_n \left(- \int_{A^c} f_n \, d\mu \right) = \lim_n \int_X f_n \, d\mu - \liminf_n \int_{A^c} f_n \, d\mu$$

+ converge $\rightarrow$ podemos pasarlo a $\rightarrow$
 - límite $\% \rightarrow$
 usar Factor de
 nuevo

$$\leq \int_X f \, d\mu - \int_{A^c} \underbrace{\liminf_n f_n}_{\substack{\text{here} \\ \text{límite} \\ \Rightarrow \text{es igual al} \\ \text{límite}}} \, d\mu = \int_X f \, d\mu - \int_{A^c} \lim_n f_n \, d\mu$$

$$= \int_X f \, d\mu - \int_{A^c} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu \quad \text{con lo que, en} \\ \text{resumen:}$$

$$\int_A f \, d\mu \leq \liminf_n \int_A f_n \, d\mu \leq \limsup_n \int_A f_n \, d\mu \leq \int_A f \, d\mu$$

con ello son todos iguales, y existe límite y
 también es igual, i.e.:

$$\liminf_n \int_A f_n \, d\mu = \limsup_n \int_A f_n \, d\mu = \lim_n \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu$$

con lo que se concluye.

P3 (X, F, μ) l.d.m. finito. $F \in L^1$ se dice uniformemente integrable (U.I.) si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in F} \int_{\{ |f| > n \}} |f| d\mu = 0.$$

a) Dem: $\exists g \in L^1$ $\forall f \in F$ $|f| \leq g$ ctp $\Rightarrow F$ U.I.

En efecto: sea $f \in F$, $n \in \mathbb{N}$: salvo un conjunto de medida nula.

$$0 \leq \int_{\{ |f| > n \}} |f| d\mu \leq \int_{\{ |g| > n \}} |g| d\mu$$

pues $\uparrow$
 $\{ |f| > n \} \subseteq \{ |g| > n \}$
 (ya que $|f| \leq g = |g|$)
 y $|f| \geq 0$.

A su vez

$$\int_{\{ |g| > n \}} |g| d\mu \leq \int_{\{ |g| > n \}} g d\mu$$

con ello, tomando sup y lim:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in F} \int_{\{ |f| > n \}} |f| d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{ |g| > n \}} g d\mu = 0 \text{ pues } g \in L^1. \\ + \text{ P2) a)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in F} \int_{\{ |f| > n \}} |f| d\mu = 0 //$$

b) Dem

$$F \text{ U.I.} \Leftrightarrow \sup_{f \in F} \int |f| d\mu < \infty \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.p.}$$

$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \sup_{f \in F} \int_A f d\mu < \varepsilon.$$

Procederemos por doble implicancia; pero primero probaremos el hint.

Sea $f \in L^1$ $a > 0$, $A \in F$: Definimos $B_a := \{ |f| > a \}$

$$\int_A |f| d\mu = \int_{A \cap B_a} |f| d\mu + \int_{A \cap B_a^c} |f| d\mu \leq \int_{A \cap B_a} |f| d\mu + \int_{A \cap B_a^c} a d\mu$$

$$\leq \int_{B_a} |f| d\mu + \int_A a d\mu = \mu(A) \cdot a + \int_{|f| > a} |f| d\mu$$

Con ello:

$\Rightarrow$ Sea $\varepsilon > 0$; usamos hint; sea $a > 0$, probemos (1).

$$\int_A |f| d\mu \leq a \cdot \mu(A) + \int_{|f| > a} |f| d\mu \quad \Bigg| \quad \sup_{f \in F} (1)$$

$$\sup_{f \in F} \int_A |f| d\mu \leq a \cdot \mu(A) + \sup_{f \in F} \int_{|f| > a} |f| d\mu$$

consideremos $\tilde{a}$ t.p. el segundo término es $< \frac{\varepsilon}{2}$
que existe pues F es U.I.

$$\left[\sup_{f \in F} \int_A |f| d\mu \leq \tilde{\alpha} \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} \right] \quad (\text{ob}) \quad (10)$$

Basta ahora tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2\tilde{\alpha}}$ y se concluye.

Para la (2): como

Basta considerar $A = X$ y escribirlo en (ob)

$$\sup_{f \in F} \int_X |f| d\mu \leq \tilde{\alpha} \mu(X) + \frac{\varepsilon}{2} < \infty.$$

recordando $\mu(X) < \infty$.

$$\Rightarrow \text{Queremos probar } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in F} \int_{\{|f| > n\}} |f| d\mu = 0.$$

De (1): $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \mu(A) \leq \delta$

$$\Rightarrow \sup_{f \in F} \int_A |f| d\mu.$$

Aplicando esto, si probamos que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n \geq n_0 \Rightarrow \mu(\{|f| > n\}) < \delta \quad \forall f \in F.$$

gastamos, pues de ar el ar obtenemos:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n \geq n_0 \Rightarrow \mu(\{|f| > n\}) < \delta$$

$$\Rightarrow \sup_{f \in F} \int_{\{|f| > n\}} |f| d\mu < \infty \rightarrow \text{def de límite.}$$

Si no fuese el caso (por contradicción): (M)

$$\forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0, f \in F \text{ tal}$$

$$\mu(\{ |f| > n \}) > \delta \text{ entonces}$$

$$\int_X |f| d\mu \geq \int_{\{|f| > n\}} |f| d\mu \geq n \cdot \mu(\{ |f| > n \}) > n \cdot \delta \geq n_0 \delta$$

teniendo $n \rightarrow \infty$: $\sup_{f \in F} \int_X |f| = \infty \rightarrow \nexists$

Así, se concluye que F es U.I. por def.