MA3802-1 Teoría de la medida
Profesor: Sebastián Donoso
Auxiliares: Juan Pablo Sepúlveda
Mariano Vazquez

Auxiliar 6: Integrales y convergencia

P1. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida e $(Y, \mathcal{G})$ un espacio medible, y sea $\varphi\colon X \to Y$ una función medible. En $(Y, \mathcal{G})$ definimos la medida inducida por φ según

$$\lambda(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)),\ \forall B \in \mathcal{G}.$$

(a) **Propuesto:** Pruebe que λ es una medida.

(b) Pruebe que para toda f medible positiva en $(Y, \mathcal{G}, \lambda)$

$$\int_Y f\ d\lambda = \int_X f \circ \varphi\ d\mu.$$

P2. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

(a) Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia decreciente de conjuntos medibles tal que $\mu(A_n) \to 0$ y sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable. Pruebe que $\int_{A_n} f d\mu \to 0$.

(b) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de funciones medibles positivas tal que $f_n \to f$ puntualmente y que

$$\int f d\mu = \lim_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu < \infty.$$

Pruebe que para todo $A \in \mathcal{F}$

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

P3. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finito. Sea F un conjunto de funciones integrables. Decimos que F es *uniformemente integrable* si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in F} \int_{\{|f|\geq n\}} |f| d\mu = 0.$$

(a) Pruebe que si existe g integrable, tal que para todo $f \in F$, $|f| \leq g$ $\mu-$c.s., entonces F es uniformemente integrable.

(b) Pruebe que F es uniformemente integrable si y sólo si se cumplen simultáneamente

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) \leq \delta \implies \sup_{f\in F} \int_A |f| d\mu < \varepsilon$.

(2) $\sup_{f\in F} \int |f| d\mu < \infty$.

Indicación: Puede ser útil probar que para f integrable, $a \geq 0$ y $A \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$\int_A |f| d\mu \leq a\mu(A) + \int_{|f|>a} |f| d\mu.$$