

Departamento de Ingeniería Matemática

MA3802-1 Análisis

Profesora: Hanne Van Den Bosch

Otoño 2024



Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 4

Auxiliares : Axel Álvarez , Diego Céspedes

P1. Si (X_1, d_1) (X_2, d_2) son espacios métricos y definimos:

$$\begin{aligned}\rho : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)\end{aligned}$$

Entonces $(X_1 \times X_2, \rho)$ es un espacio métrico, pruebe entonces que:

a) Pruebe que $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$ donde consideramos el espacio métrico $(X_1 \times X_2, \rho)$

Una solución: Si queremos resolver el ejercicio con sucesiones, no se puede hacer nada sin entender las sucesiones de $(X_1 \times X_2, \rho)$, por lo que tendremos que caracterizarlas, para ello, recurriendo a la intuición de lo que ocurre con $\mathbb{R}^n$, planteamos el siguiente resultado:

Prop 1.

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \text{ en } (X_1 \times X_2, \rho) \iff x_n \rightarrow x \text{ en } (X_1, d_1) \wedge y_n \rightarrow y \text{ en } (X_2, d_2)$$

Demostración. $\implies$: Sea $\varepsilon > 0$, por definición de la métrica en ρ , se tiene que : existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq N$:

$$\rho((x_n, y_n), (x, y)) = d_1(x_n, x) + d_2(y_n, y) < \varepsilon$$

Ahora observando que las distancias siempre son no negativas, se tiene en particular que

$$d_1(x_n, x) \leq d_1(x_n, x) + d_2(y_n, y) < \varepsilon$$

Y que :

$$d_2(y_n, y) \leq d_1(x_n, x) + d_2(y_n, y) < \varepsilon$$

D i.e para $n \geq N$, se tiene que

$$d_1(x_n, x) < \varepsilon$$

Y que :

$$d_2(y_n, y) < \varepsilon$$

i.e

$$x_n \rightarrow x \text{ en } (X_1, d_1)$$

$$y_n \rightarrow y \text{ en } (X_2, d_2)$$

Para la otra implicancia, $\impliedby$: Sea $\varepsilon > 0$, se tiene por un lado que como $x_n \rightarrow x$ que $\exists$ un N_1 , tal que para todo $n \geq N_1$:

$$d_1(x_n, x) < \varepsilon$$

Analogamente como $y_n \rightarrow y$, existe un N_2 , tal que para todo $n \geq N_2$:

$$d_2(y_n, y) < \varepsilon$$

Luego , se quiere hacer pequeña la cantidad:

$$\rho((x_n, y_n), (x, y)) = d_1(x_n, x) + d_2(y_n, y)$$

Pero observamos que usando lo anterior, se tiene para todo $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ que :

$$\rho((x_n, y_n), (x, y)) = d_1(x_n, x) + d_2(y_n, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Y como el $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye lo pedido.

□

Entonces usando la proposición, mostremos la igualdad con doble inclusión:

$$\overline{A_1 \times A_2} \subseteq \overline{A_1} \times \overline{A_2}$$

Entonces tomando un $(x, y) \in \overline{A_1} \times \overline{A_2}$, como $x \in \overline{A_1}$ existe una sucesión en A_1 , x_n , tal que $x_n \rightarrow x$, también como $y \in \overline{A_2}$ existe una sucesión en A_2 , y_n , tal que $y_n \rightarrow y$, i.e la sucesión

$$(x_n, y_n) \in A_1 \times A_2$$

Y por la proposición demostrada, $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ i.e $(x, y) \in \overline{A_1 \times A_2}$

Entonces para ver la otra inclusión:

$$\overline{A_1} \times \overline{A_2} \subseteq \overline{A_1 \times A_2}$$

Tomando un $(x, y) \in \overline{A_1 \times A_2}$, se tiene que existe una sucesión, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$(x_n, y_n) \in A_1 \times A_2$$

y que:

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$$

Además para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A_1$, y $y_n \in A_2$, usando la prop, tenemos que $x_n \rightarrow x$ i.e $x \in \overline{A_1}$, y análogamente que $y \in \overline{A_2}$ es decir

$$(x, y) \in \overline{A_1} \times \overline{A_2}$$

Observación: Puede ser instructivo intentar resolver el ejercicio sin sucesiones, es decir con la definición de clausura .

- b) Pruebe que si (X_1, d_1) , $A_1 \subseteq X_1$ es denso en (X_1, d_1) , y además para (X_2, d_2) $A_2 \subseteq X_2$ es denso en (X_2, d_2) , concluya que $A_1 \times A_2$ es denso en $(X_1 \times X_2, \rho)$

Una solución: Tratando de usar lo anterior (se puede hacer sin ocupar lo anterior), tenemos por un lado que $\overline{A_1} = X_1$, y que $\overline{A_2} = X_2$, entonces:

$$\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2} = X_1 \times X_2$$

Entonces se tiene que $A_1 \times A_2$ es denso.

P2. Sean (X, d) , (Y, ρ) espacios métricos,

- a) Si $f : X \rightarrow Y$ es continua , y se tiene que $\overline{A} = \overline{B}$, pruebe que $\overline{f(A)} = \overline{f(B)}$.

Una solución: Notando que la expresión, involucra términos que relacionan a la imagen de f , a través de A , recordamos la siguiente caracterización de continuidad estudiada en el auxiliar 3.

$$f \text{ es continua} \iff \forall A \subset X \quad f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

Entonces usando la siguiente proposición, queremos relacionar $f(A)$ con $f(B)$, para ello observamos que :

$$f(B) \subseteq f(\overline{B}) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

Juntando la primera y la ultima inclusión, se tiene que:

$$f(B) \subseteq \overline{f(A)}$$

Pero como queremos la expresión con cerradura, tomamos cerradura a ambos lados, esto se puede hacer pues la cerradura es monotona, luego:

$$\overline{f(B)} \subseteq \overline{\overline{f(A)}} = \overline{f(A)}$$

Donde la ultima igualdad de la derecha, se tiene pues la cerradura de un cerrado es si mismo, luego concluimos la inclusión.

$$\overline{f(B)} \subseteq \overline{f(A)}$$

La otra inclusión no es necesario demostrarla, pues el argumento es simétrico, así que intercambiando B por A en la demostración anterior, se tiene que:

$$\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(B)}$$

Demostrando así la igualdad de conjuntos requerida.

- b) Sean (X, d) , (Y, ρ) espacios métricos, pruebe que si f y g , son funciones continuas que van de $X \rightarrow Y$, y son tal que existe un denso $D \subseteq X$ donde, f y g coinciden, pruebe que $f \equiv g$

Una solución: La idea es usar el hecho de que:

- Las funciones continuas se portan bien con sucesiones i.e

$$x_n \rightarrow x \implies f(x_n) \rightarrow f(x)$$

- Se puede aproximar cualquier punto por sucesiones, i.e para todo $x \in X$, existe sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$, tal que $x_n \rightarrow x$

Combinando estos dos hechos, demostraremos el resultado, entonces: Sea $x \in X$, por el segundo punto, existe sucesion tal que $x_n \rightarrow x$, donde la sucesion esta contenida en D , ahora usando la continuidad de f y g , se tiene que :

$$f(x_n) \rightarrow f(x)$$

Y que :

$$g(x_n) \rightarrow g(x)$$

Pero, como x_n está en D , se tiene que $f(x_n) = g(x_n)$, por lo tanto por unicidad del limite en espacios metricos, necesariamente $f(x)$ debe ser igual a $g(x)$:

Observación: El resultado se puede demostrar sin sucesiones, puede ser un buen ejercicio hacerlo, pues ese tipo de desarrollos será útil en la unidad de espacios topológicos.

P3. Demuestre que para $1 \leq p < \infty$, $l^p(\mathbb{N})$ admite un subconjunto conjunto denso numerable.

Donde $l^p(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\}$

Recuerde que la métrica en $l^p(\mathbb{N})$, con p finito se define como:

$$d(x, y) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Una solución: La idea de resolución de este ejercicio, será ir gradualmente bajando la dificultad del problema, primero tratemos de encontrar una forma en lenguaje natural de entender densidad.

Un conjunto será denso si se acerca arbitrariamente a cualquier punto

Máticamente, interpretaremos la siguiente frase en el contexto de espacios métricos de la siguiente forma: Un subconjunto $D \subseteq l^p(\mathbb{N})$ será denso, si para cada $x \in l^p(\mathbb{N})$ y para cada $\varepsilon > 0$, existe un $d \in D$, tal que $d(x, y) < \varepsilon$.

Entonces la primera **reducción** a la dificultad del problema será la siguiente:

Si quiero acercarme a un $f \in l^p(\mathbb{N})$, basta acercarme en un número finito de coordenadas

Veamos porque se tiene esto, para ello recordaremos el siguiente hecho de series absolutamente convergentes:

Prop 2. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty$, luego la sucesión:

$$s_k = \sum_{n \geq k} |a_n| \rightarrow 0$$

Observación: Usualmente esto no se ve en los cursos de cálculo, pero resulta muy útil así que recomiendo que lo interioricen, pues este resultado se usará frecuentemente en este y otros cursos.

Entonces usando lo anterior, para $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = x \in l^p(\mathbb{N})$, se tiene que:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty$$

Luego, usando la proposición, para $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$, tal que :

$$\sum_{n \geq N} |x_n|^p < \varepsilon$$

Entonces esto nos dice que la *cola* no aporta nada, entonces solo debo acercarme a los primeros términos, entonces definiendo, $g \in l^p(\mathbb{N})$ de la siguiente forma:

$$g = (g_n)_{n \in \mathbb{N}} = \begin{cases} f_n & : n \leq N \\ 0 & : n > N \end{cases}$$

Se tiene que :

$$d(f, g) < (\varepsilon^{\frac{1}{p}})$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario se tiene que cambiándolo por ε^p

$$d(f, g) < \varepsilon$$

Escribiendo lo de arriba , tenemos lo siguiente: Si definimos

$$F_m = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : x_n = 0 \text{ para } n > m\}$$

Se tiene que

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} F_m \text{ es denso en } \subseteq l^p(\mathbb{N})$$

Sin embargo los conjuntos F_m son no numerables, por lo que es necesario otra aproximación, para ello intentaremos buscar lo siguiente:

Inspirándose en la densidad de los racionales en los reales, tratemos de ver que los conjuntos F_m son aproximables por sucesiones con coordenadas racionales

entonces definiremos los conjuntos

$$C_m = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : x_n = 0 \text{ para } n > m \wedge x_n \in \mathbb{Q} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Veamos que cada C_m es denso en F_m , en efecto sea $f \in F_m$, luego

$$f = (f_1, \dots, f_m, 0, \dots, 0, \dots)$$

Ahora usando la densidad de los racionales en los reales, podemos aproximar cada f_i , con un $x_i \in \mathbb{Q}$, tanto cuanto queramos, por lo tanto, existen x_i , con $i \in [m] = \{1, \dots, m\}$, tal que :

$$|f_i - x_i| < \varepsilon$$

Entonces si definimos la sucesión

$$x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0, \dots)$$

Se tiene que :

$$d(f, x) = \left(\sum_{k=1}^m |x_k - f_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < M^{\frac{1}{p}} \varepsilon$$

Pero como ε es arbitrario en verdad el término $m^{\frac{1}{p}}$ no afecta (cambiamos el ε a conveniencia para que al lado derecho solo me quede ε , es de suma relevancia que el m sea fijo, pues de otra forma no se puede hacer el argumento esbozado arriba.)

Entonces hemos demostrado que cada C_m es denso en F_m , entonces afirmamos que :

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_m \text{ es denso en } l^p(\mathbb{N})$$

Entonces, veamos esto, juntando todos los ingredientes anteriores, como :

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} F_m \text{ es denso en } l^p(\mathbb{N})$$

para cada $f \in l^p(\mathbb{N})$ existe un $g \in F_m$ para algún m , tal que :

$$d(f, g) < \varepsilon$$

Por otro lado por lo demostrado anterior, es posible encontrar un $h \in C_m$, tal que :

$$d(h, g) < \varepsilon$$

Ahora usando la desigualdad triangular se tiene que

$$d(h, f) \leq d(f, g) + d(h, g) < 2\varepsilon$$

Entonces hemos demostrado que la unión de los C_m es denso, resta ver solo que es numerable, pero esto resulta, debido a que hay una biyección entre C_m y $\mathbb{Q}^{m-1}$ que es clara, (los elementos de C_m están completamente caracterizados por lo que pasa en las primeras $m - 1$ coordenadas), luego como la union numerable de conjuntos es numerable se tiene lo pedido.

P4. Demuestre que $l^\infty(\mathbb{N})$ no admite un subconjunto denso numerable

La métrica en $l^\infty(\mathbb{N})$ es la del supremo i.e

$$d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

Una solución: Para ver este ejercicio demostraremos antes el siguiente resultado que servirá como un criterio para ver que ciertos espacios no admiten densos numerables:

Prop 3. Sea (X, d) un espacio metrico que admite una cantidad no numerable de abiertos disjuntos a

pares, luego no puede admitir un conjunto denso numerable.

Demostración. Razonando rumbo a contradicción, si existiese un conjunto D denso numerable, existiría un abierto de los disjuntos a pares, que tiene que forzosamente quedar sin un elemento de D , luego D no puede ser denso, es decir llegamos a una contradicción. $\square$

Ahora el objetivo será producir una cantidad no numerable de abiertos disjuntos a pares, entonces como resulta difícil construir o pensar que forma tienen los abiertos de $l^\infty(\mathbb{N})$, nos apoyaremos en el conjunto no numerable más clásico, es decir $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, entonces lo que haremos será asignarle a cada conjunto $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, un elemento $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

$$(e_A)_{n \in \mathbb{N}} = \begin{cases} 1 & n \in A \\ 0 & n \notin A \end{cases}$$

Entonces es posible demostrar que para $A \neq C$ ambos en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, se tiene que $B(e_A, \frac{1}{2}) \cap B(e_C, \frac{1}{2}) = \emptyset$

Ejercicio: Demostrar esto Entonces usando la proposición concluimos que no puede admitir un denso numerable

P5. Se define el espacio de funciones Hölder continuas de exponente α como:

$$C^\alpha([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_\alpha < \infty\}$$

donde

$$\|f\|_\alpha = \sup_{\substack{0 \leq x \leq y \leq 1 \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Además, se define $d_\alpha(f, g) = d_\infty(f, g) + \|f - g\|_\alpha$, donde d_∞ es la métrica del supremo.

a) Demuestre que d_α es una métrica en $C^\alpha([0, 1])$

Es buen ejercicio demostrar la desigualdad triangular, para repasar supremos/infimos, etc.

b) Demuestre que $(C^\alpha([0, 1]), d_\alpha)$ es un espacio métrico completo.

P6. [Propuesto] [Estudio de subgrupos de $\mathbb{R}$:]

Sea $(H, +)$ un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

a) Mostrar que H es denso en $\mathbb{R}$ o existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $H = \alpha\mathbb{Z}$.

b) Estudio de Subgrupos de $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, considerando el grupo $(\mathbb{S}^1, \cdot)$, donde $\cdot$ es la multiplicación compleja usual.

Deducir que los subgrupos de $\mathbb{S}^1$ son densos en $\mathbb{S}^1$, o son finitamente generados por $e^{2i\pi p/q}$ con (p, q) coprimos

Indicación: Usar la pregunta anterior, y separar los casos $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $\alpha \in \mathbb{Q}$, para el caso $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pruebe que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ es denso en $\mathbb{R}$

No es necesario que resuelvan este ejercicio, pero les da una idea de los poderosos que son los conceptos que están estudiando, y como pueden resolver otro tipo de problemas.