**Departamento de Ingeniería Matemática**
MA3802-1 Análisis
**Profesora:** Hanne Van Den Bosch
**Otoño 2024**

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

# Auxiliar 4

**Auxiliares :** Axel Álvarez , Diego Céspedes

**P1.** Si $(X_1, d_1)$ $(X_2, d_2)$son espacios métricos y definimos:

$$\rho : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \to \mathbb{R}_+$$
$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

Entonces $(X_1 \times X_2, \rho)$ es un espacio métrico, pruebe entonces que:

*a)* Pruebe que $\overline{A_1} \times \overline{A_2} = \overline{A_1 \times A_2}$ donde consideramos el espacio metrico $(X_1 \times X_2, \rho)$

*b)* Pruebe que si $(X_1, d_1)$, $A_1 \subseteq X_1$ es denso en $(X_1, d_1)$ , y además para $(X_2, d_2)$ $A_2 \subseteq X_2$ es denso en $(X_2, d_2)$, concluya que $A_1 \times A_2$ es denso en $(X_1 \times X_2, \rho)$

**P2.** Sean $(X, d)$ , $(Y, \rho)$ espacios métricos,

*a)* Si $f : X \to Y$ es continua , y se tiene que $\overline{A} = \overline{B}$, pruebe que $\overline{f(A)} = \overline{f(B)}$.

*b)* Sean $(X, d)$ ,$(Y, \rho)$ espacios métricos, pruebe que si $f$ y $g$, son funciones continuas que van de $X \to Y$ , y son tal que existe un denso $D \subseteq X$ donde, $f$ y $g$ coinciden, pruebe que $f \equiv g$

**P3.** Demuestre que para $1 \leq p < \infty$, $l^p(\mathbb{N})$ admite un subconjunto conjunto denso numerable.

Donde $l^p(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\}$
Recuerde que la métrica en $l^p(\mathbb{N})$ , con $p$ finito se define como:

$$d(x, y) = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

**P4.** Demuestre que $l^\infty(\mathbb{N})$ no admite un subconjunto denso numerable. La métrica en $l^\infty(\mathbb{N})$ es la del supremo i.e

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

**P5.** Se define el espacio de funciones Hölder continuas de exponente $\alpha$ como:

$$C^\alpha([0, 1]) = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} : \|f\|_\alpha < \infty\}$$

donde

$$\|f\|_\alpha = \sup_{\substack{0\leq x\leq y\leq 1 \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Además, se define $d_\alpha(f, g) = d_\infty(f, g) + \|f - g\|_\alpha$, donde $d_\infty$ es la métrica del supremo.

**a)** Demuestre que $d_\alpha$ es una métrica en $C^\alpha([0, 1])$
**b)** Demuestre que $(C^\alpha([0, 1]), d_\alpha)$ es un espacio métrico completo.

**P6. [Propuesto] [Estudio de subgrupos de $\mathbb{R}$:]**
Sea $(H, +)$ un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

*a)* Mostrar que $H$ es denso en $\mathbb{R}$ o existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $H = \alpha\mathbb{Z}$.

*b)* Estudio de Subgrupos de $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, considerando el grupo $(\mathbb{S}^1, \cdot)$, donde $\cdot$ es la multiplicación compleja usual.
Deducir que los subgrupos de $\mathbb{S}^1$ son densos en $\mathbb{S}^1$, o son finitamente generados por $e^{2i\pi p/q}$ con $(p, q)$ coprimos
**Indicación:** Usar la pregunta anterior, y separar los casos $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $\alpha \in \mathbb{Q}$, para el caso $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , pruebe que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ es denso en $\mathbb{R}$