Departamento de Ingeniería Matemática
MA3801-1 Análisis
Profesor: Hanne Van Den Bosch
Otoño 2024

Auxiliar 2

Auxiliares : Axel Álvarez , Diego Céspedes

P1. [Ultramétricas]

Definición: Sea X un conjunto no vació.
Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una distancia ultramétrica si satisface las siguientes propiedades para todo x, y, z en X:

- **Positividad:** $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
- **Simetría:** $d(x, y) = d(y, x)$ para todo par de puntos x, y en X.
- **Desigualdad ultramétrica:** $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$.

a) Pruebe que si d es una ultrametrica para X, entonces (X, d) es un espacio métrico

Una solución:
Observamos que lo único que falta verificar parea que (X, d) sea un espacio métrico, es la desigualdad triangular, entonces demostraremos esto.
Es decir hay que ver que $\forall x, y, z \in X$:

$$d(x, y) \leq d(y, z) + d(x, z)$$

Para ver esto, usamos la desigualdad **ultramétrica**, que nos dice que :

$$d(x, y) \leq \max\{d(y, z), d(x, z)\}$$

A partir de esto hay al menos dos formas de concluir, una consiste en acotar los máximos y usar la positividad de la distancia:

$$\max\{d(y, z), d(x, z)\} \leq \max\{d(y, z) + d(x, z), d(x, z) + d(y, z)\} = d(x, z) + d(y, z)$$

Otra demostración se puede hacer usando que como tenemos un máximo entre dos cantidades, el máximo lo alcanza a lo menos uno de las dos cantidades, entonces en un caso(el otro es completamente análogos), el máximo lo alcanza $d(x, z)$, esto nos dice que:

$$d(x, y) \leq \max\{d(y, z), d(x, z)\} = d(x, z) \leq d(x, z) + d(y, z)$$

b) **[Propuesto]**Pruebe que para x, y, z al menos dos de los números siguientes son iguales: $d(x, y)$,$d(x, z)$,$d(y, z)$.

c) Pruebe que en un espacio ultramétrico las bolas abiertas son (también cerradas) y que las bolas cerradas son (también) abiertas.

Una solución: Solo demostraremos que las bolas abiertas son cerradas, la otra demostración es análoga: Entonces lo que hay que ver es que el complemento es abierto, es decir que :

$$\forall z \in B(x, r)^c \ \exists \ \delta \ > 0 \text{ tal que: } B(z, \delta) \subseteq B(x, r)^c$$

Observamos que si $B(x, r)^c$ es vació, no hay nada que demostrar. Entonces, solo trabajaremos en el caso en donde el conjunto es no vació.
Entonces, debemos encontrar el buen $\delta > 0$ tal que funcione, para ello, trataremos de probar la inclusión, pero en cierto punto tendremos que imponer condiciones en $\delta > 0$ para que sea cierta la inclusión.
Entonces tomemos un $w \in B(z, \delta)$, tal que $w \in B(x, r)^c$, la idea será en el camino encontrar δ que

nos permita concluir que esto efectivamente ocurre. Como queremos acotar $d(x, w)$ por abajo, nos convendrá usar la desigualdad ultrametrica de la siguiente forma

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, w), d(y, w)\}$$

Pues , queremos acotar inferiormente $d(x, w)$, y la única cota inferior que conocemos es $d(x, y) \geq r$. Entonces en la desigualdad anterior, nos gustaría que :

$$\max\{d(x, w), d(y, w)\} = d(x, w)$$

Para poder concluir, para esto queremos que el máximo no lo alcance $d(y, w)$, y como tenemos libertad al controlar $d(y, w)$, observamos que si $d(y, w) < r$, entonces se tiene lo pedido, pues si no se tuviese

$$r \leq= \max\{d(x, w), d(y, w)\} = d(y, w) < r$$

Es decir una contradicción.
Se desprende entonces que los valores $\delta > 0$, validos, que sirven, corresponden a cualquier numero $\delta \leq r$. Entonces se demostró que :

$$\forall z \in B(x, r)^c \ \exists \quad > 0 \text{ tal que: } B(z, \delta) \subseteq B(x, r)^c$$

Sea $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ el conjunto de las partes de $\mathbb{N}$. Para A,$B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se define $\rho(A, B) = 0$ si $A = B$, y $\rho(A, B) = \frac{1}{n+1}$ si n es el elemento mas pequeño de $A\Delta B = A \cup B \setminus (A \cap B)$

d) Muestre que ρ define una ultramétrica para $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Una solución: Hay que verificar varias cosas:

1) Positividad: Si $A \neq B$, sea $c = \min\{A\Delta B\}$, luego

$$\rho(A, B) = \frac{1}{c+1} > 0$$

Si $A = B$, luego $\rho(A, B) = 0$

2) Simetría: Se tiene pues $A\Delta B = B\Delta A$

3) Hay que ver la desigualdad ultrametrica, i.e

$$\rho(A, B) \leq \max\{\rho(A, C), \rho(B, C)\}$$

Para esto, hay dos casos , primero $A = B$ o $A \neq B$, en el primer caso no hay nada que demostrar, en el segundo caso, sea $c = \min\{A\Delta B\}$
Reescribiendo $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, podemos observar que tenemos dos casos

- $c \in A \setminus B$
- $c \in B \setminus A$

Son embargo estos dos casos son simétricos, así que sin perdida de generalidad, podemos asumir que estamos en el primer caso

$$c \in A \setminus B$$

Ahora, queremos relacionar c con C, sin embargo no tenemos muchas herramientas a nuestra disposición, por eso no queda otra alternativa que nuevamente ponerse en casos, así que tenemos dos casos

- $c \in C$: En este caso , como $c \notin B$, se tiene que : $c \in B\Delta C$,es decir

$$\min\{B\Delta C|\} \leq c$$

que reoordenando, nos permite concluir que

$$\text{mín}\{B\Delta C\} + 1 \leq c + 1$$

Que es equivalente a

$$\rho(A,B) = \frac{1}{c+1} \leq \frac{1}{\text{mín}\{B\Delta C\}+1} = \rho(B,C) \leq \text{máx}\{\rho(B,C), \rho(A,C)\}$$

- $c \notin C$: En este caso el argumento es similar, pues se tiene que $c \in A\Delta C$, y se puede hacer el mismo argumento que en el caso de arriba para concluir que :

$$\rho(A,B) \leq \rho(A,C)$$

e) Muestre que

$$\phi : A \to A^c$$

es continua.

Una solución:
Para ver continuidad, lo que conviene es calcular $\rho(\phi(A), \phi(B))$ y ver como se puede acotar esto en términos de $\rho(A,B)$ Entonces calculemos

$$\rho(\phi(A), \phi(B)) = \rho(A^c, B^c) = \frac{1}{1 + \text{mín}\{A^c\Delta B^c\}}$$

Entonces el calculo se reduce ea encontrar el minimo de $A^c\Delta B^c$, pero si vamos trabajando un poco la expresión llegaremos a algo sorprendente.

$$\begin{aligned} A^c\Delta B^c &= (A^c \cup B^c) \setminus (A^c \cap B^c) \\ &= (A \cap B)^c \cap (A \cup B) \\ &= A \cup B \setminus (A \cap B) \\ &= A\Delta B \end{aligned}$$

Entonces nos damos cuenta que

$$\rho(\phi(A), \phi(B)) = \rho(A,B)$$

Entonces es una isometría, por lo tanto es continua.

f) Pruebe que para $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ fijo :

$$\xi : A \to A \cap B$$

es continua.

Una solución: Fijemos el conjunto B, nuevamente la técnica sera calcular para un conjunto de base A, y otro conjunto C, calcular

$$\rho(A \cap B, B \cap C)$$

y acotarlo superiormente por una cantidad que dependa de $\rho(A,B)$ Entonces calculamos

$$\rho(A \cap B, B \cap C) = \frac{1}{1 + \text{mín}\{(A \cap B)\Delta(B \cap C)\}}$$

Para esto observamos que para acotar superiormente esta cantidad, en vista del desarrollo anterior, basta ver que :

$$\text{mín}\{(A \cap B)\Delta(B \cap C)\} \geq \text{mín}\{A\Delta C\}$$

Tratemos de ver como se podría ver esto, una forma, seria viendo que

$$(A \cap B)\Delta(B \cap C) \subseteq A\Delta C$$

Tratemos de ver que se tiene algo parecido

En efecto:

$$(A \cap B)\Delta(B \cap C) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \setminus ((A \cap B \cap B \cap C))$$

Manipulando el lado derecho:

$$B \cap (A \cup C) \setminus ((A \cap B) \cap C) = B \cap (A \cup C) \cap ((A \cap C)^c \cup B^c)$$

Distribuyendo la union en la intersección, vemos que cuando aparece $B \cap B^c$ nos da vació, por lo que los unicos conjuntos que sobreviven son:

$$= B \cap (A \cup C) \cap (A \cap C)^c = B \cap (A\Delta C)$$

Así que efectivamente tenemos lo pedido, pues claramente

$$B \cap (A\Delta C) \subseteq A\Delta C$$

Luego la función es continua, pues para un $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon > 0$, de esta forma, tenemos que para un A en las partes de los naturales, para todo C en las partes de los naturales tal que :

$$\rho(A, C) < \varepsilon \implies \rho(A \cap B, B \cap A) \leq \rho(A, C) < \varepsilon$$

g) **[Propuesta]** Pruebe que para $C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ fijo :

$$\xi_2 : A \to A \cup C$$

es continua.

h) **[Propuesta]** Pruebe que para $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : A \subseteq B\} \text{ es cerrado}$$

y que si B es finito

$$\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : B \subseteq A\} \text{ es abierto}$$

P2. Sea (X, d) un espacio métrico, y A un conjunto no vació, si se define la función:

$$f(x) : X \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = d(x, A)$$

Donde

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

Pruebe que $f(x) = d(x, A)$ es una función Lipschitz de constante 1

Una solución:
Como queremos demostrar que la función es Lipschitz, tomaremos dos puntos x , y, y la idea del resultado que queremos demostrar , es que si x está cerca de y , luego y está tan cerca del conjunto de A, como x lo está.

La única herramienta que tenemos a nuestra disposición para demostrar este resultado es la desigualdad triangular, pero no podemos usarla directamente porque $d(x, A)$ se calcula como un ínfimo, entonces debemos hacer los cálculos con un elemento $a \in A$ arbitrario y de alguna forma tomar ínfimo, entonces, sea $a \in A$
Por la desigualdad triangular tenemos:

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \text{ para todo } a \in A$$

Luego en el lado izquierdo acotamos por el ínfimo(el ínfimo siempre existe pues la función distancia es no negativa)

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

Ahora despejamos el lado que depende de a,

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a) \text{ para todo } a \in A$$

Ahora podemos tomar ínfimo para obtener, usando que el ínfimo es la cota inferior mas grande.

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$$

es decir

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

Por simetría repetimos el mismo argumento, pero esta vez con

$$d(y, a) \leq d(x, y) + d(x, a)$$

Podemos concluir que

$$d(y, A) - d(x) \leq d(x, y)$$

i.e hemos demostrado que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

P3. **[Extensión de funciones]** Sea $f : Y \to \mathbb{R}$, una función K Lipschitz, de constante K, con $Y \subseteq \mathbb{R}$, el objetivo es probar que que existe una extensión K-Lipschitz de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Construya la extensión en el caso en que f es acotada.

Indicación: Considere $g(x) = \inf_{y\in Y}\{f(y) + Kd(x, y)\}$

Una solución: Definiendo la extensión siguiendo la indicación hay dos cosas que demostrar:

- Es efectivamente una extensión: Es decir hay que ver que si $x \in Y$, se tiene que $g(x) = f(x)$, para ver esto , no es muy clara la igualdad, así que intentaremos demostrar que $g(x) \leq f(x)$ y que $f(x) \leq g(x)$:
  Observación: Como f está acotada los ínfimos son finitos.
  - $g(x) \leq f(x)$: En efecto como el ínfimo es la cota inferior más grande, y estamos instanciando en Y, y $x \in Y$
    $$g(x) = \inf_{y\in Y} f(y) + Kd(x, y) \leq f(x) + Kd(x, x) = f(x)$$
  - $f(x) \leq g(x)$: Está desigualdad es un poco as intrincada, pues $g(x)$ está definido como un ínfimo, así que tendremos usar que f es Lipschitz en Y, ya que de esta forma podemos relacionar $f(x)$ y $f(y)$ con y en Y arbitrario.
    En efecto como es $K - Lipschitz$, se tiene que
    $$f(x) - f(y) \leq Kd(x, y)$$
    Luego
    $$f(x) \leq Kd(x, y) + f(y)$$
    para todo $y \in Y$, tomando ínfimo se tiene que
    $$f(x) \leq g(y)$$
- Es $K-$ Lipschitz.: Para esto tomemos x, $y \in \mathbb{R}$ y pivoteando con un $a \in Y$ y usando la desigualdad triangular
  $$g(x) \leq f(a) + Kd(x, a) \leq f(a) + Kd(x, y) + Kd(y, a)$$
  Despejando, tenemos que

$$g(x) - Kd(x,y) \leq f(a) + Kd(y,a)$$

Tomando infimo

$$g(x) - Kd(x,y) \leq g(y)$$

i.e

$$g(x) - g(y) \leq Kd(x,y)$$

El mismo argumento se puede aplicar intercamibando x con y para concluir que

$$g(y) - g(y) \leq Kd(x,y)$$

En definitiva se tiene que

$$|g(x) - g(y)| \leq Kd(x,y)$$

$b)$ **[Propuesto]** Para el caso general, extienda sucesivamente las restricciones

$$f_n = f|_{Y_n}$$

a $[-n-1, n+1]$, donde

$$Y_n = [-n, n] \cup \{Y \cap [-n-1, n+1]\}$$

P4. Sea (X, μ, T) un s.d.a y $f \in: L^2$, pruebe que teorema de Bikrhoff es valido en este contexto y mas aún se tienen que llamando $\tilde{f}$ a la función limite:

$a)$

$$||\tilde{\phi}||_2 \leq ||\phi||_2$$

$b)$

$$\lim_{n\to\infty} ||S_n(f) - \tilde{f}||_2 = 0$$

El teorema de Birkhoff es válido, pues f está en L^1, porque la mediad es finita

$a)$ Para lo otro, consideramos $S_n(f)$, por otro lado como f^2 está en L^1, podemos usar Birkhoff en f^2, lo que nos dice que

$$g_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f^2 \circ T^k(x) \to (\tilde{f^2})$$

Por Birkhoff $S_n(f)$ converge puntualmente a $\tilde{f}$, nos gustaría usar TCD versión L^2, asi que tenemos que ver cotas en L^2

$$|S_n(f)(x)|^2 = |\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x)|^2$$

Acotando via Jensen

$$\leq |\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} (f^2 \circ T^k)^2(x)| = ||g_n||^2$$

Integrando tenemos qu e:

$$||S_n(f)||_2^2 \leq ||g_n||_2^2$$

Por Bikrhoff g_n converge algo,