Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-6 – Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Auxiliar 12: Diagramas de Fase extra

Con más Dibujitos

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

P1.- **Estabilidad** Considere el sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' = -\operatorname{sen} y \\ y' = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y \end{cases}$$

~~a)~~ Estudie la estabilidad y tipos de los puntos críticos del sistema en $[0, 2\pi[x[0, 2\pi[$.

b) Encuentre los puntos críticos del sistema e indique si son aislados o no.

c) Para los puntos aislados, realice el diagrama de fase local para sus SL asociados.

d) Grafique el diagrama de fase general del SNLA.

P2.- **Coordenadas Polares**

P3.- **Sols. Periódicas**

Resumen

Def. 4 (Nuclinas): Se llama nulclina en x a la curva definida por $F(x,y)=0$ y nulclina en y a la curva definida por $G(x,y)=0$.

Def. 5 (Punto Crítico o de Equilibrio): Decimos que (,) es un punto crítico o de equilibrio del (SNLA) si:

$$\begin{cases} F(x,y)=0, \\ G(x,y)=0. \end{cases}$$

Es decir, la intersección de las nuclinas. El conjunto de puntos críticos se denota como:

$$C=\{(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{R}^2 : F(\bar{x},\bar{y})=G(\bar{x},\bar{y})=0\}.$$

Def. 6 (Sistema Linealizado): Consideramos un sistema linearizado (SL):

$$\begin{cases} x'=a(x-\bar{x})+b(y-\bar{y}), \\ y'(t)=c(x-\bar{x})+d(y-\bar{y}), \end{cases}$$

Donde $(\bar{x},\bar{y})$ es punto crítico.

Def. 7 (SNLA degenerado): Un sistema (SNLA) es degenerado en torno a $(\bar{x},\bar{y})$ si $|J(\bar{x},\bar{y})|=0$.

Def. 8 (Puntos Críticos aislados o densos): Un punto crítico $(\bar{x},\bar{y})$ de (SNLA) es aislado si existe $\delta>0$ tal no hay ningún otro punto crítico en la bola de centro $(\bar{x},\bar{y})$ y radio δ. De lo contrario se dice que los puntos críticos son densos en torno a $(\bar{x},\bar{y})$.

Prop. 4: Sea $(\bar{x},\bar{y})$ un punto crítico de (SNLA).

1. Si $|J(\bar{x},\bar{y})|\neq 0$, entonces $(\bar{x},\bar{y})$ es el único punto crítico de (SL). En particular es aislado para (SL).
2. Si $|J(\bar{x},\bar{y})|=0$, entonces los puntos críticos de (SL) son densos en torno a $(\bar{x},\bar{y})$. Más precisamente, el conjunto C es una recta que contiene a $(\bar{x},\bar{y})$ si $|J(\bar{x},\bar{y})|\neq 0_{2\times 2}$ y es todo el plano si $|J(\bar{x},\bar{y})|=0_{2\times 2}$
3. Si $|J(\bar{x},\bar{y})|\neq 0$ entonces $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto crítico aislado de (SNLA).

Def. 8 (Trayectoria): Dado el (SNLA):

$$\begin{cases} x'(t)=F(x,y),\ x(t_0)=x_0 \\ y'(t)=G(x,y),\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$

con condición inicial $(x(t_0),y(t_0))=(x_0,y_0)$, a la solución del problema de Cauchy se le llama trayectoria que parte de (x_0,y_0). Más precisamente, es la función:

$$\begin{cases} \mathcal{T}: I_0\to\mathbb{R}^2 \\ t\to (x(t),y(t)) \end{cases}$$

donde I_0 es su intervalo máximo de existencia (que por supuesto contiene al que entrega el Teorema de Existencia y Unicidad).

Def. 8 (Recorrido): El recorrido R de esta trayectoria es el conjunto imagen de la función $\mathcal{T}$. Es decir,

$$R=\{(x(t),y(t))\in\mathbb{R}^2 : t\in I_0\}.$$

Claramente dos trayectorias distintas pueden tener el mismo recorrido.

Def. 8 (Diagrama de Fases): Un diagrama de fases de este sistema autónomo es a una colección de recorridos de las trayectorias para un número representativo de condiciones iniciales.

Def. 8 (Plano de Fase): El plano donde se grafica el diagrama de fases se llama plano de fase.

Prop. 4: Si dos trayectorias se intersectan, entonces sus recorridos coinciden.

Def. 8 (Diagrama de flujo): El diagrama de flujo se construye al graficar en una colección de puntos (x,y) representativos el vector $(F(x,y),G(x,y))$. Por regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\text{y luego}\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{G(x,y)}{F(x,y)}.$$

Por lo tanto el recorrido de la trayectoría es tangente al flujo.

Def. 8 (Punto Crítico Estable e Inestable): Un punto crítico $(\bar{x},\bar{y})$ es estable si para cada $\epsilon>0$ podemos encontrar $\delta>0$ de manera que $\|(x(t),y(t))-(\bar{x},\bar{y})\|<\epsilon$ para todo t, siempre que $\|(x_0,y_0)-(\bar{x},\bar{y})\|<\delta$. De lo contrario se dice que es inestable.

Def. 8 (Punto Crítico Asintótocamente Estable): Por otra parte, un punto crítico $(\bar{x},\bar{y})$ es asintóticamente estable si es estable y además existe $\delta>0$ tal que

$$\lim_{t\to\infty}(x(t),y(t))=(\bar{x},\bar{y})$$

, siempre que $\|(x_0,y_0)-(\bar{x},\bar{y})\|<\delta$.

P1.- **Estabilidad** Considere el sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' = -\operatorname{sen} y & = F(x,y) \\ y' = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y & = G(x,y) \end{cases}$$

a) Estudie la estabilidad y tipos de los puntos críticos del sistema en $[0, 2\pi[x[0, 2\pi[$.

Def. 5 (Punto Crítico o de Equilibrio): Decimos que (,) es un punto crítico o de equilibrio del (SNLA) si:

$$\begin{cases} F(x,y) = 0, \\ G(x,y) = 0. \end{cases}$$

Es decir, la intersección de las nuclinas. El conjunto de puntos críticos se denota como:

$$C = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}.$$

Calculamos los puntos críticos del sist.

Buscamos los puntos tq.

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ -\operatorname{sen} y = 0 \\ (2)\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightsquigarrow y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \rightsquigarrow y = k\pi,\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Pero, sabemos que $(x,y) \in [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$, nos interesan entonces: $k = 0$ y $k = 1$.

Luego, los puntos críticos serían:

$\to (0,\pi), (0,0), (\pi, 0), (\pi,\pi)$

Ahora veamos qué tipo de puntos son, para esto calculamos el jacobiano.

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin y \\ \sin(x) + \sin y \end{pmatrix}$$

Derivar el vector

$$J(\vec{X}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & -\cos y \\ \cos(x) & \cos(y) \end{pmatrix}$$

Evaluamos en cada punto crítico y sacamos los valores propios asociados:

$$\to J((0,\pi)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A_1$$

$$\cdot\ |A_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda + \lambda^2 - 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2a}$$

$$\lambda_1 = \underbrace{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}_{>0}, \quad \lambda_2 = \underbrace{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}_{<0}$$

Como son dos reales de distinto signo, tenemos que $(0,\pi)$ es un punto silla.

$$\rightarrow J((0,0)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_2$$

$$\bullet\ |A_2 - \lambda I| = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda + \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\alpha > 0} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i = \alpha + \beta i$$

Como tenemos un número complejo, con $\alpha > 0$, entonces concluimos que $(0,0)$ es una espiral inestable.

$$\rightarrow J((\pi,0)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A_3$$

$$\bullet\ |A_3 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda + \lambda^2 - 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}^{\,>2}}{2}$$

Tenemos un valor positivo y otro negativo, ambos reales. Deducimos que $(\pi, 0)$ es un punto silla.

$$\rightarrow J((\pi,\pi)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A_4$$

$$\bullet\ |A_4 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda + \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{<0} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Tenemos entonces que (π, π) es una espiral estable

b) Encuentre los puntos críticos del sistema e indique si son aislados o no.

Calculemos los vectores propios de los puntos silla:

- $(0, \pi)$

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

- $\ker(A_1 - \lambda_1 I)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a \approx -0,6$$

$$ax + y = 0 \iff \boxed{y = -ax}$$

$$ax - y + ay \Rightarrow ax + ax - a^2 x = 0$$
$$x = 0 \checkmark$$

Tenemos que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}$

- $\ker(A_1 - \lambda_2 I)$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b \approx 1,6$$

$$bx + y = 0 \iff \boxed{y = -bx}$$

$$x - y + by = 0 \Rightarrow x + bx - b^2 x = 0 \iff x = 0 \checkmark$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -b \end{pmatrix}$$

- $(\pi, 0)$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\ker(A_3 - \lambda_1 I)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1 + \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c \approx -1,6$$

$$cx - y = 0 \iff \boxed{y = cx}$$

$$-x + y + cy = 0 \iff x = 0 \checkmark$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$$

- $\operatorname{Ker}(A_3 - \lambda_2 I)$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} d & -1 \\ -1 & 1 + \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d \approx 0{,}6$$

$$dx - y = 0 \iff \boxed{y = dx} \checkmark$$

$$-x + y + dy = 0 \Rightarrow x = 0 \checkmark$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ d \end{pmatrix}$$

Sobre los espirales:

→ Tenemos que

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\alpha > 0} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{>0} i = \alpha + \beta i \qquad (0,0)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{<0} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{>0} i \qquad (0,0)$$

rota en sentido horario!

c) Grafiquemos los puntos silla:

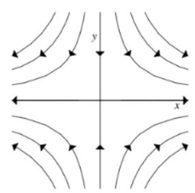
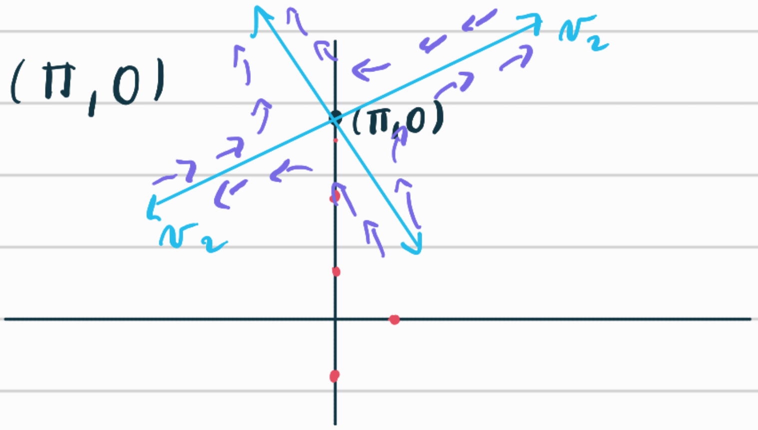


FIGURA 12. Punto silla

→ $(0,\pi)$

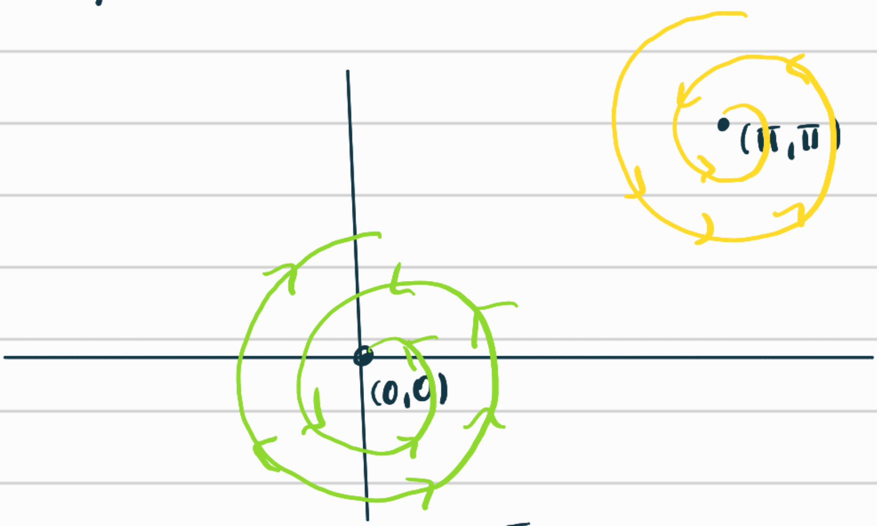
1. Dibujamos los vectores propios trasladados

$\rightarrow (\pi, 0)$



2. identifico el $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$, tenemos que: "entra por el $\vec{v}$. p. asociado al negativo y sale por el otro"

Grafiquemos las espirales



Si $\alpha < 0$, la trayectoria se acerca. Por otra parte, la rotación ocurre en sentido horario si $\beta > 0$ y antihorario si $\beta < 0$ (ver Figuras 13, 14, 15).

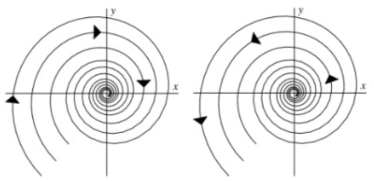


FIGURA 13. Diagrama de fase del sistema (47). A la izquierda $\alpha < 0$, $\beta > 0$, y a la derecha $\alpha > 0$, $\beta < 0$.

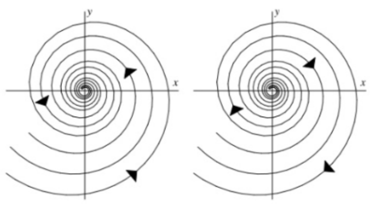


FIGURA 14. Diagrama de fase del sistema (47). A la izquierda $\alpha < 0$, $\beta < 0$, y a la derecha $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Tenemos entonces que (π, π) es una espiral estable, como $\beta > 0$, gira en sentido horario.

Como tenemos un número complejo, con $\alpha > 0$, entonces concluimos que $(0,0)$ es una espiral inestable.

También para $\beta > 0$, gira en sentido horario.

d) Grafique el diagrama de fase general del SNLA.