Auxiliar 13.5: Diagramas de Fase extra

Con más Dibujitos

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

P1.- **Sistemas Rapidos**

a)Resuelva el siguiente sistema lineal y esboce el diagrama de fase:

$\dot{X} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ \frac{-5}{2} & 2 \end{pmatrix} X$

b) Clasifique el equilibrio

P2.- **Más sistemas**

a)Resuelva el siguiente sistema lineal y esboce el diagrama de fase:

$\dot{X} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X$

b) Clasifique el equilibrio.

P3.- **Estabilidad** Considere el sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' = -\operatorname{sen} y \\ y' = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y \end{cases}$$

a) Estudie la estabilidad y tipos de los puntos críticos del sistema en $[0, 2\pi[\times[0, 2\pi[$.

b) Encuentre los puntos críticos del sistema e indique si son aislados o no.

c) Para los puntos aislados, realice el diagrama de fase local para sus SL asociados.

d) Grafique el diagrama de fase general del SNLA.

Resumen

Def. 1 (Punto Crítico o de Equilibrio): Decimos que (,) es un punto crítico o de equilibrio del (SNLA) si:

$$\begin{cases} F(x,y) = 0, \\ G(x,y) = 0. \end{cases}$$

Es decir, la intersección de las nuclinas. El conjunto de puntos críticos se denota como:

$$C = \{(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : F(\bar{x},\bar{y}) = G(\bar{x},\bar{y}) = 0\}.$$

Prop. 1: Sea $(\bar{x},\bar{y})$ un punto crítico de (SNLA).

1. Si $|J(\bar{x},\bar{y})| \neq 0$, entonces $(\bar{x},\bar{y})$ es el único punto crítico de (SL). En particular es aislado para (SL).

2. Si $|J(\bar{x},\bar{y})| = 0$, entonces los puntos críticos de (SL) son densos en torno a $(\bar{x},\bar{y})$. Más precisamente, el conjunto C es una recta que contiene a $(\bar{x},\bar{y})$ si $|J(\bar{x},\bar{y})| \neq 0_{2\times 2}$ y es todo el plano si $|J(\bar{x},\bar{y})| = 0_{2\times 2}$

3. Si $|J(\bar{x},\bar{y})| \neq 0$ entonces $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto crítico aislado de (SNLA).

Def. 2 (Trayectoria): Dado el (SNLA):

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) = F(x,y), \ x(t_0) = x_0 \\ y'(t) = G(x,y), \ y(t_0) = y_0 \end{cases}}$$

con condición inicial $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$, a la solución del problema de Cauchy se le llama trayectoria que parte de (x_0, y_0). Más precisamente, es la función:

$$\begin{cases} \mathcal{T} : I_0 \to \mathbb{R}^2 \\ t \to (x(t), y(t)) \end{cases}$$

donde I_0 es su intervalo máximo de existencia (que por supuesto contiene al que entrega el Teorema de Existencia y Unicidad).

Def. 3 (Recorrido): El recorrido R de esta trayectoria es el conjunto imagen de la función $\mathcal{T}$. Es decir,

$$R = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in I_0\}.$$

Claramente dos trayectorias distintas pueden tener el mismo recorrido.

Def. 4 (Diagrama de Fases): Un diagrama de fases de este sistema autónomo es a una colección de recorridos de las trayectorias para un número representativo de condiciones iniciales.

Def. 5 (Plano de Fase): El plano donde se grafica el diagrama de fases se llama plano de fase.

Prop. 2: Si dos trayectorias se intersectan, entonces sus recorridos coinciden.

Def. 6 (Diagrama de flujo): El diagrama de flujo se construye al graficar en una colección de puntos (x, y) representativos el vector $(F(x, y), G(x, y))$. Por regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \text{y luego} \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}.$$

Por lo tanto el recorrido de la trayectoría es tangente al flujo.

Def. 7 (Punto Crítico Estable e Inestable): Un punto crítico $(\bar{x},\bar{y})$ es estable si para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ de manera que $\| (x(t), y(t)) - (\bar{x},\bar{y}) \| < \epsilon$ para todo t, siempre que $\| (x_0, y_0) - (\bar{x},\bar{y}) \| < \delta$. De lo contrario se dice que es inestable.

Def. 8 (Punto Crítico Asintótocamente Estable): Por otra parte, un punto crítico $(\bar{x},\bar{y})$ es asintóticamente estable si es estable y además existe $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t)) = (\bar{x},\bar{y})$$

, siempre que $\| (x_0, y_0) - (\bar{x},\bar{y}) \| < \delta$.

Prop. 3: Diagramas de fase de acuerdo a los valores y vectores propios:

1) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$: Nodo estable Tangente a v_1.

2) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: Nodo inestable Tangente a v_1.

3) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: Nodo estable Tangente a v_2.

4) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$: Nodo inestable Tangente a v_2.

5) $\lambda_1\lambda_2$ reales de distinto signo: Punto silla, entra en v_i asociado a λ_i negativo, sale en el otro.

6) $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$ y $\alpha > 0$: espiral inestable.

7) $\lambda_1 = \alpha + \beta i \lambda_2 = \alpha - \beta i$ y $\alpha < 0$: espiral estable $\alpha < 0$

8) $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$ y $\alpha = 0$: circunferencia estable

P1.- **Sistemas Rapidos**

a)Resuelva el siguiente sistema lineal y esboce el diagrama de fase:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ \frac{-5}{2} & 2 \end{pmatrix} X$$

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ -\frac{5}{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(4+\lambda)(2-\lambda) + 2 \cdot \frac{5}{2} = 0$$

$$-(4+\lambda)(2-\lambda) + 5 = 0$$

$$-(8 - 2\lambda - \lambda^2) + 5 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0$$

$\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 1$ punto silla!

$\underline{\lambda_1 = -3)}$ $$\begin{pmatrix} -4+3 & 2 \\ -\frac{5}{2} & 2+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -v_1 + 2v_2 = 0 \\ -\frac{5v_1}{2} + 5v_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} -v_1 + 2v_2 = 0 \quad v_1 = 1 \\ -1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

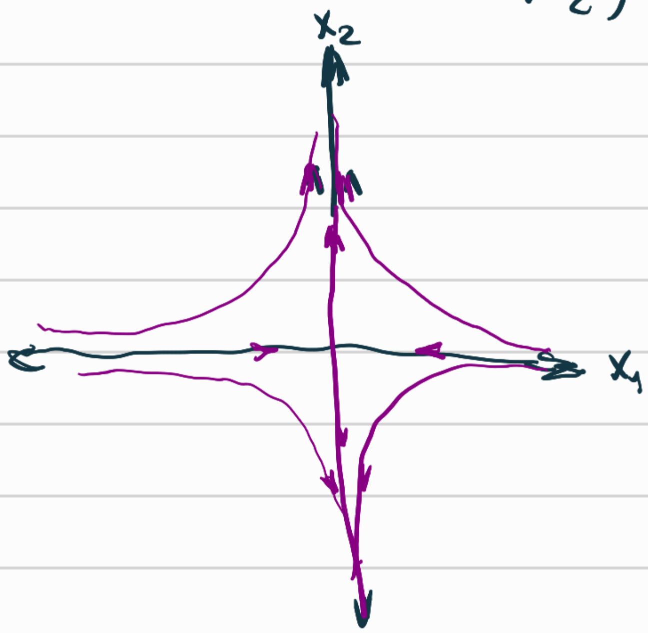
$\lambda_2 = 1$

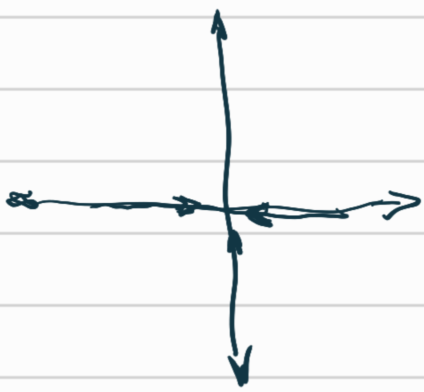
$$\begin{pmatrix} -4-1 & 2 \\ -\frac{5}{2} & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-5v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 1 \quad v_2 = \frac{5}{2}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = c_1 \cdot e^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$ sol. gral!





b) Punto silla

P2)
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

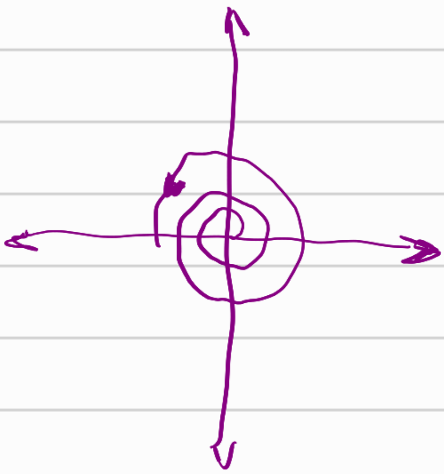
$$(6-\lambda)(2-\lambda)+5=0 \Rightarrow 12-8\lambda+\lambda^2+5=0$$

$$\lambda^2-8\lambda+17=0$$

$$\lambda_1=\frac{8+\sqrt{64-4\cdot 17}}{2}=\frac{8+2i}{2}=4+i$$

$$\lambda_2=4-i$$

Foco inestable:



$$\lambda_1=\overset{\alpha}{4}+\overset{\beta}{i} \qquad \begin{pmatrix} 6-(4+i) & -1 \\ 5 & 2-(4+i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=0$$

$$(2-i)v_1-v_2=0$$

$$v_1=1 \ \wedge \ v_2=(2-i)$$

$$V=\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_1}-i\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \qquad V=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = \alpha + i\beta$

$$X(t) = c_1 \left[V_1 \cos(\beta t) - V_2 \operatorname{sen}(\beta t) \right] e^{\alpha t} + c_2 [V_1 \operatorname{sen}(\beta t) + V_2 \cos(\beta t)] e^{\alpha t}$$

$$= c_1 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \right] e^{4t}$$

$$+ c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t) \right] e^{4t}$$

P3.- **Estabilidad** Considere el sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' = -\operatorname{sen} y & = F(x,y) = 0 \\ y' = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y & = G(x,y) = 0 \end{cases}$$

a) Estudie la estabilidad y tipos de los puntos críticos del sistema en $[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$.

- $-\operatorname{sen} Y = 0 \qquad Y = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{sen} X + \operatorname{sen} Y = 0 \qquad X = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

$k = 0, \; k = 1$

Los puntos interesantes (críticos)

- $(0,0), \; (0,\pi), \; (\pi,0), \; (\pi,\pi)$

Calcular el Jacobiano:

$$\begin{array}{ll} \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} Y \\ \operatorname{sen}(X) + \sin(Y) \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

$$J((x,y)) = \begin{pmatrix} 0 & -\cos(y) \\ \cos(x) & \cos(y) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_1$$

$$|A_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda + \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{>0} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{>0} i$$

(0,0) Espiral inestable.

$$\rightarrow J(0,\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A_2$$

$$|A_2 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda + \lambda^2 - 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\lambda_1 = \underbrace{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}_{>0} \quad \sqrt{5}>2, \qquad \lambda_2 = \underbrace{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}_{<0}$$

(0, π) es punto silla.

$\rightarrow (\pi, 0)$

$$J(\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A_3$$

$$|A_3 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda + \lambda^2 - 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{<0} \quad \sqrt{5}>2$$

(π, 0) es punto silla.

$\rightarrow (\pi, \pi)$

$$J(\pi,\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A_4$$

$$|A_4 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda + \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Espiral estable (π, π)

b) Encuentre los puntos críticos del sistema e indique si son aislados o no.

⤳ Todos son Aislados pq $|J(x,y)| \neq 0$ (PROPUESTO)

c) Para los puntos aislados, realice el diagrama de fase local para sus SL asociados.

$(0, \pi)$ $\quad \lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 2, \quad \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$

Veamos sus $\vec{v}$. P.

$$\operatorname{Ker}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A_2} - \lambda_1 I \right)$$

$$\boxed{a = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}6}$$

$$\begin{pmatrix} \overset{a}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} & 1 \\ 1 & -1 + \overset{a}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a \approx -0{,}6$

$$ax + y = 0 \iff \boxed{y = -ax}$$

$$(2) \quad x - y + ay = 0$$

$$x + ax - a^2 x = 0 \iff \boxed{x = 0} \checkmark$$

Nuestro $\vec{v}$. P. es

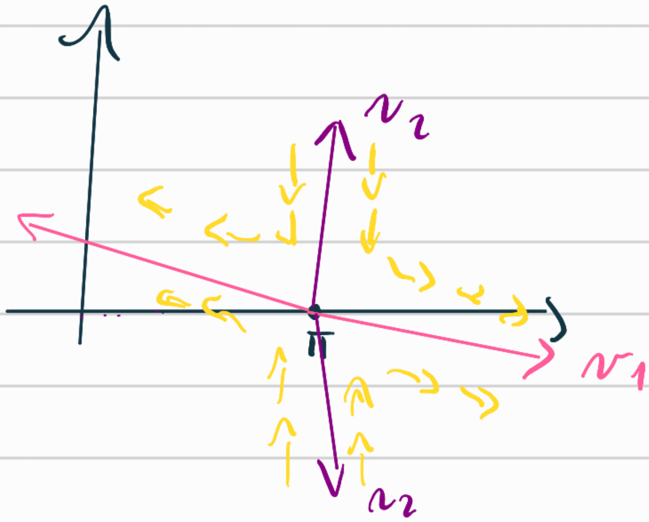
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} \qquad a = -0{,}6$$

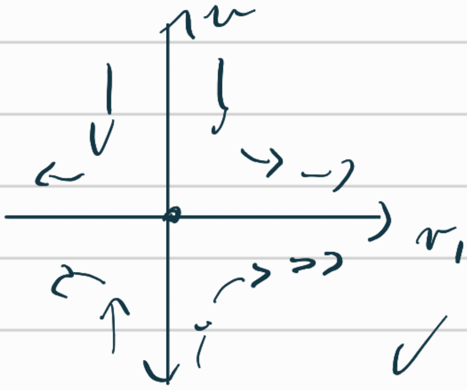
$\mathrm{Ker}(A_2 - \lambda_2 I)$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2}^{\,b} & 1 \\ 1 & -1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}^{\,b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

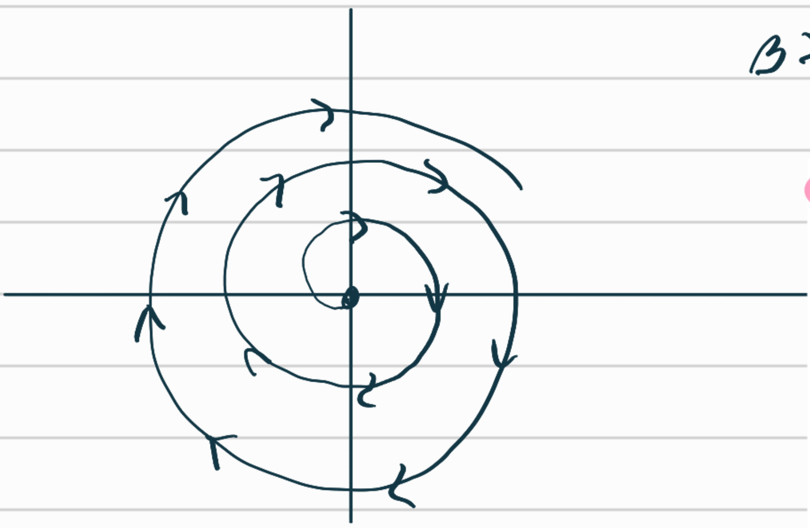
$bx + y = 0 \qquad \boxed{y = -bx}$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -b \end{pmatrix} \qquad b \approx 1{,}6$





$\rightsquigarrow (0,0)$ espiral inestable



$\beta > 0$

Si $\alpha < 0$, la trayectoria se acerca. Por otra parte, la rotación ocurre en sentido horario si $\beta > 0$ y antihorario si $\beta < 0$ (ver Figuras 13, 14, 15).

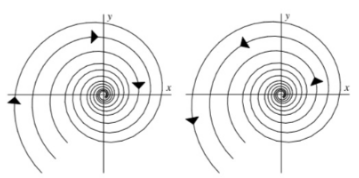


FIGURA 13. Diagrama de fase del sistema (47). A la izquierda $\alpha < 0$, $\beta > 0$, y a la derecha $\alpha > 0$, $\beta < 0$.

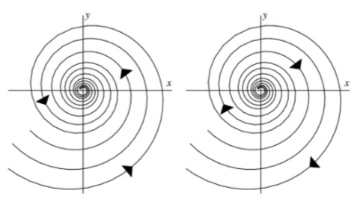


FIGURA 14. Diagrama de fase del sistema (47). A la izquierda $\alpha < 0$, $\beta < 0$, y a la derecha $\alpha > 0$, $\beta > 0$.