



Auxiliar 13.5: Diagramas de Fase extra

Con más Dibujitos

Profesor: Michal Kowalczyk

Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

P1.- Sistemas Rápidos

a) Resuelva el siguiente sistema lineal y esboce el diagrama de fase:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} X$$

b) Clasifique el equilibrio

P2.- Más sistemas

a) Resuelva el siguiente sistema lineal y esboce el diagrama de fase:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X$$

b) Clasifique el equilibrio.

P3.- Estabilidad Considere el sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' = -\sin y \\ y' = \sin x + \sin y \end{cases}$$

- a) Estudie la estabilidad y tipos de los puntos críticos del sistema en $[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$.
- b) Encuentre los puntos críticos del sistema e indique si son aislados o no.
- c) Para los puntos aislados, realice el diagrama de fase local para sus SL asociados.
- d) Grafique el diagrama de fase general del SNLA.

Resumen

Def. 1 (Punto Crítico o de Equilibrio): Decimos que $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto crítico o de equilibrio del (SNLA) si:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ G(x, y) = 0. \end{cases}$$

Es decir, la intersección de las nuclinas. El conjunto de puntos críticos se denota como:

$$C = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}.$$

Prop. 1: Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto crítico de (SNLA).

1. Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$, entonces $(\bar{x}, \bar{y})$ es el único punto crítico de (SL). En particular es aislado para (SL).
2. Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$, entonces los puntos críticos de (SL) son densos en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$. Más precisamente, el conjunto C es una recta que contiene a $(\bar{x}, \bar{y})$ si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0_{2 \times 2}$ y es todo el plano si $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0_{2 \times 2}$
3. Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$ entonces $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto crítico aislado de (SNLA).

Def. 2 (Trayectoria): Dado el (SNLA):

$$\begin{cases} x'(t) = F(x, y), & x(t_0) = x_0 \\ y'(t) = G(x, y), & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con condición inicial $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$, a la solución del problema de Cauchy se le llama trayectoria que parte de (x_0, y_0) . Más precisamente, es la función:

$$\begin{cases} \mathcal{T} : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow (x(t), y(t)) \end{cases}$$

donde I_0 es su intervalo máximo de existencia (que por supuesto contiene al que entrega el Teorema de Existencia y Unicidad).

Def. 3 (Recorrido): El recorrido R de esta trayectoria es el conjunto imagen de la función $\mathcal{T}$. Es decir,

$$R = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in I_0\}.$$

Claramente dos trayectorias distintas pueden tener el mismo recorrido.

Def. 4 (Diagrama de Fases): Un diagrama de fases de este sistema autónomo es a una colección

de recorridos de las trayectorias para un número representativo de condiciones iniciales.

Def. 5 (Plano de Fase): El plano donde se grafica el diagrama de fases se llama plano de fase.

Prop. 2: Si dos trayectorias se intersectan, entonces sus recorridos coinciden.

Def. 6 (Diagrama de flujo): El diagrama de flujo se construye al graficar en una colección de puntos (x, y) representativos el vector $(F(x, y), G(x, y))$. Por regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \text{ y luego } \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}.$$

Por lo tanto el recorrido de la trayectoria es tangente al flujo.

Def. 7 (Punto Crítico Estable e Inestable): Un punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ es estable si para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ de manera que $\|(x(t), y(t)) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \epsilon$ para todo t , siempre que $\|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta$. De lo contrario se dice que es inestable.

Def. 8 (Punto Crítico Asintóticamente Estable): Por otra parte, un punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ es asintóticamente estable si es estable y además existe $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y})$$

, siempre que $\|(x_0, y_0) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta$.

Prop. 3: Diagramas de fase de acuerdo a los valores y vectores propios:

- 1) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$: Nodo estable Tangente a v_1 .
- 2) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: Nodo inestable Tangente a v_1 .
- 3) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: Nodo estable Tangente a v_2 .
- 4) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$: Nodo inestable Tangente a v_2 .
- 5) $\lambda_1 \lambda_2$ reales de distinto signo: Punto silla, entra en v_i asociado a λ_i negativo, sale en el otro.
- 6) $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$ y $\alpha > 0$: espiral inestable.
- 7) $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$ y $\alpha < 0$: espiral estable $\alpha < 0$
- 8) $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$ y $\alpha = 0$: circunferencia estable