Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-6 – Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Auxiliar 13: Diagramas de Fase

Dibujitos

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

P1.- **Tanques de líquido** Dos tanques, cada uno con 50 litros de líquido, están conectados entre sí mediante tubos, de modo que el líquido pasa del tanque A al tanque B a razón de 4 litros/minuto, y del tanque B al tanque A a 1 litro/minuto (figura 1). El líquido dentro de cada tanque se mantiene bien revuelto. Por otro lado, entra agua pura al tanque A a razón de 3 litros/minuto, y la solución sale del tanque B a 3 litros/minuto. Si en un principio el tanque A contiene 25 kg de sal y el tanque B no contiene sal (sólo agua), determine la masa de sal en cada tanque en el instante $t \geq 0$. Grafique en el mismo plano las dos cantidades $x_1(t)$ y $x_2(t)$, donde $x_1(t)$ es la masa de sal en el tanque A y $x_2(t)$ es la masa de sal en el tanque B.

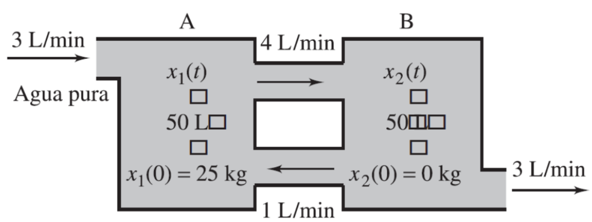


Figura 1

P2.- **Coordenadas Polares** Cierto sist. no lineal autónomo, al ser expresado en coordenadas polares queda de la forma

$$\begin{cases} r' = \frac{3-r}{2} \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

Denotemos $X(t) = (r(t), \theta(t))$. Determine y bosqueje las trayectorias que satisfacen las condiciones $X(0) = (0,1), X(0) = (3,0)$ y $X(0) = (4,0)$

P3.- **Sols. Periódicas** Considere el sistema

$$x' = -y + x\frac{f(r)}{r}, \quad y' = x + y\frac{f(r)}{r},$$

para $(x,y) \neq (0,0)$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Considere el cambio de variables a coordenadas polares $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Demuestre que

$$\theta' = 1 \quad \text{y} \quad r' = f(r).$$

Para $f(r) = (r-1)(r-2)(r-3)$ bosqueje el diagrama de fase del sistema no lineal en el plano xy. Describa el comportamiento de todas las soluciones con condición inicial $(x(0), y(0)) \neq (0,0)$. ¿Cuándo las soluciones son periódicas?

Resumen

Teo. 3 : Sean $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$
1. Si $W(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$ entonces $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente independientes.
2. En general, el que $W(x) = 0$ para todo $x \in I$ no basta para garantizar que $y_1, \ldots, y_n$ sean linealmente dependientes.
3. Si $y_1 \ldots, y_n$ son funciones en $\mathcal{H}$, las siguientes proposiciones son equivalentes:
a) $W(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$;
b) $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$; y
c) $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente independientes.
Prop. 1 (Principio de Superposición): Sean $X_1, ..., X_n$ soluciones de la EDO homogénea, entonces la combinación lineal:

$$X(t) = X_1(t), ..., X_n(t)$$

También es una solución.
Def. 6 (Matriz Fundamental): Escribimos:

$$\Phi(t) = (X_1(t)|...|X_n(t))$$

La matriz cuyas columnas son soluciones de la EDO. Además:

$$X(t) = C\Phi$$

Donde C es una matríz de constantes.
Prop. 2: La matriz fundamental tiene la siguiente propiedad:

$$\Phi' = A\Phi$$

Teo. 4(Variación de Parámetros): La solución particular de la EDO se deduce como:

$$X_p(t) = \Phi \int \Phi^{-1} F(t)$$

Def. 6 (SNLA): Dados un intervalo abierto I y una función $F : I \times R^n \to R^n$, consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con condición inicial $X_0 \in R^n$ en $t_0 \in I$:

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)), \ t \in I \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Si la función F no es lineal con respecto a la varible X, se dirá que es un sistema no lineal (SNL). Si además F no depende explícitamente de la variable t, se dirá que es un sistema no lineal autónomo (SNLA). Usasaremos los SNLA de la forma:

$$\begin{cases} x'(t) = F(x, y), \ x(t_0) = x_0 \\ y'(t) = G(x, y), \ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Prop. 3: Un SNLA es invariente bajos traslaciones temporales (variable t).
Def. 6 (Vector de Estado): El vector $X(t) \in R^n$, que es la solución del sistema en un punto $t \in I$, se llama vector de estado.
Obs. 1: Dada una función $h : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, toda ecuación de orden superior de la forma:

$$y^{(n)} = h(t, y, y\prime, ..., y^{(n-1)})$$

$$y(t_0) = y_0, y\prime(t_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

se puede llevar, mediante un cambio de variables, a la forma (SNL). Claramente, si h no depende explícitamente de t, se puede llevar a la forma (SNLA).
Def. 6 (Nuclinas): Se llama nulclina en x a la curva definida por $F(x, y) = 0$ y nulclina en y a la curva definida por $G(x, y) = 0$.
Def. 6 (Punto Crítico o de Equilibrio): Decimos que (,) es un punto crítico o de equilibrio del (SNLA) si:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ G(x, y) = 0. \end{cases}$$

Es decir, la intersección de las nuclinas. El conjunto de puntos críticos se denota como:

$$C = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}.$$

Def. 6 (Sistema Linealizado): Consideramos un sistema linearizado (SL):

$$\begin{cases} x' = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}), \\ y'(t) = c(x - \bar{x}) + d(y - \bar{y}), \end{cases}$$

Donde $(\bar{x}, \bar{y})$ es punto crítico.
Def. 6 (SNLA degenerado): Un sistema (SNLA) es degenerado en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$ si $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$.
Def. 6 (Puntos Críticos aislados o densos): Un punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ de (SNLA) es aislado si existe $\delta > 0$ tal no hay ningún otro punto crítico en la bola de centro $(\bar{x}, \bar{y})$ y radio δ. De lo contrario se dice que los puntos críticos son densos en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$.

P1.- **Tanques de líquido** Dos tanques, cada uno con 50 litros de líquido, están conectados entre sí mediante tubos, de modo que el líquido pasa del tanque A al tanque B a razón de 4 litros/minuto, y del tanque B al tanque A a 1 litro/minuto (figura 1). El líquido dentro de cada tanque se mantiene bien revuelto. Por otro lado, entra agua pura al tanque A a razón de 3 litros/minuto, y la solución sale del tanque B a 3 litros/minuto. Si en un principio el tanque A contiene 25 kg de sal y el tanque B no contiene sal (sólo agua), determine la masa de sal en cada tanque en el instante $t \geq 0$. Grafique en el mismo plano las dos cantidades $x_1(t)$ y $x_2(t)$, donde $x_1(t)$ es la masa de sal en el tanque A y $x_2(t)$ es la masa de sal en el tanque B.

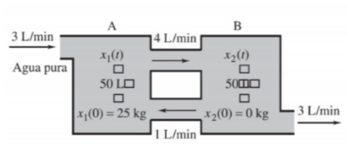


Figura 1

$$x_1' = \overbrace{\frac{-4x_1}{50}}^{\text{salen}} + \overbrace{\frac{1x_2}{50}}^{\text{entra}} + 3\cdot 0$$

↳ como es agua pura no sal no la contamos

$$x_2' = \underbrace{\frac{4x_1}{50}}_{\text{entran}} - \underbrace{\frac{4x_2}{50}}_{\text{salen}}$$

Escribimos el sist. como una matriz.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/50\, x_1 + x_2/50 \\ 4/50\, x_1 - 4/50\, x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios de la matriz:

$$\begin{vmatrix} -\frac{4}{50}-\lambda & 1/50 \\ 4/50 & -\frac{4}{50}-\lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{4}{50}-\lambda\right)^2 - \frac{4}{50^2}$$

$$= \frac{16}{50^2} + \frac{4}{25}\lambda + \lambda^2 - \frac{4}{50^2}$$

$$= \lambda^2 + \frac{4}{25}\lambda + \frac{12}{50^2}$$

$$= \left(\lambda + \frac{2}{50}\right)\left(\lambda + \frac{6}{50}\right)$$

$$\lambda_1 = -\frac{2}{50}, \quad \lambda_2 = -\frac{6}{50}$$

Calculamos sus v.P.

$\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I)$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{50} & \frac{1}{50} \\ 4/50 & -\frac{2}{50} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} -2x + y &= 0 \\ y &= 2x \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ es } \vec{v}.p.$$

$\text{Ker}(A - \lambda_2 I)$

$$\begin{pmatrix} 2/50 & 1/50 \\ 4/50 & 2/50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad 2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$$

Así $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es $\vec{v}$.P.

Finalm. la soluc nos queda:

$$X(t) = C_1 e^{-2/50\, t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\frac{6}{50} t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Despejemos las cts. con las condiciones iniciales:

$$X_1(0) = 25 \qquad X_2(0) = 0$$

$$C_1 + C_2 = 25 \Leftrightarrow \quad C_1 = 25/2 = C_2$$
$$2C_1 - 2C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 = C_2$$

Así, la sol. nos queda:

$$X(t) = \frac{25}{2} e^{-2/50\, t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{25}{2} e^{-\frac{6}{50} t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

P2.- **Coordenadas Polares** Cierto sist. no lineal autónomo, al ser expresado en coordenadas polares queda de la forma

$$\begin{cases} r' = \frac{3-r}{2} \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

Denotemos $X(t) = (r(t), \theta(t))$. Determine y bosqueje las trayectorias que satisfacen las condiciones $X(0) = (0,1)$, $X(0) = (3,0)$ y $X(0) = (4,0)$

Notamos que las variables no dependen entre sí, por lo que decimos que el sist. está desacoplado.

Podemos calcular por separado:

- $r' = \dfrac{3-r}{2} \iff \dfrac{r'}{3-r} = \dfrac{1}{2} \iff \displaystyle\int \frac{dr}{3-r} = \int \frac{dt}{2}$

$$\iff -\ln(3-r) = \frac{t}{2} + c \iff 3 - r = e^{-t/2}K$$

$$\iff r = 3 - e^{-t/2}K$$

- $\theta' = 1 \iff \displaystyle\int d\theta = \int dt \iff \theta = t + c$

Luego, tenemos que

$$X(t) = (r(t), \theta(t)) = (3 - e^{-t/2}K,\ t + c)$$

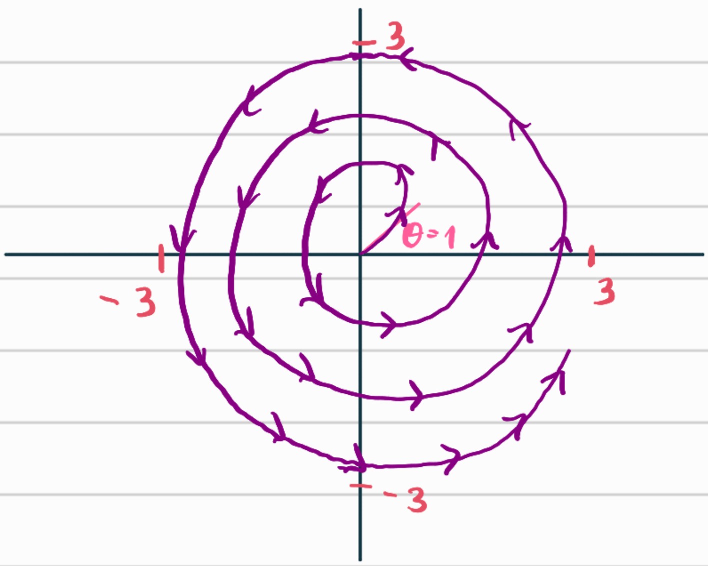
Usemos las condiciones iniciales para ver las trayectorias:

$\to X(0) = (0,1) \iff 3 - \cancel{e^{-0/2}}^{\,1}K = 0 \iff K = 3$

$$c = 1$$

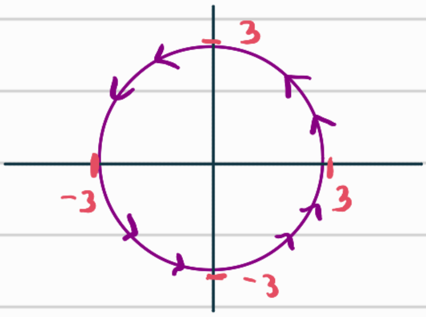
¿Qué pasa en el infinito?

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = 3 \quad , \quad \lim_{t\to\infty} \theta(t) = \infty$$



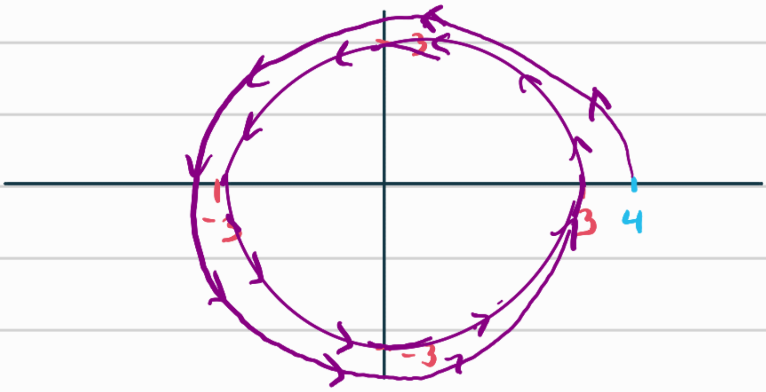
$\rightarrow X(0) = (3,0) \Rightarrow \cancel{3} - K = \cancel{3} \Leftrightarrow K = 0 \Leftrightarrow r(t) = 3$

$C = 0 \Leftrightarrow \theta(t) = t$



$\rightarrow X(0) = (4,0) \Rightarrow 3 - K = 4 \Leftrightarrow K = -1 \Leftrightarrow r(t) = 3 + e^{-t/2}$

$C = 0 \Leftrightarrow \theta(t) = t$



$\lim_{t \to \infty} r(t) = 3$

$r(0) = 4$

$\theta(0) = 0$

P3.- **Sols. Periódicas** Considere el sistema

$$x' = -y + x\frac{f(r)}{r}, \quad y' = x + y\frac{f(r)}{r},$$ SNLA

para $(x,y) \neq (0,0)$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Considere el cambio de variables a coordenadas polares $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Demuestre que

$$\theta' = 1 \quad \text{y} \quad r' = f(r).$$

Consideramos los cambios de variable:

$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad x = r\cos\theta$, $\quad y = r\sin\theta$

$r^2 = x^2+y^2$,

Derivamos

$\to \cancel{2}\cancel{r}\cdot r' = 2xx' + 2yy' =$

$$= \cancel{2}x\left(-y + x\frac{f(r)}{r}\right) + \cancel{2}y\left(x + y\frac{f(r)}{r}\right)$$

$$= -\cancel{xy} + x^2\frac{f(r)}{r} + \cancel{xy} + y^2\frac{f(r)}{r}$$

$$= \frac{f(r)}{r}(x^2+y^2) = \frac{f(r)}{r}(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)$$

$$= \cancel{r}f(r)(\underbrace{\cos^2(\theta) + \sin^2\theta}_{1})$$

$\therefore r' = f(r)$

$\to$ Recordamos que $\theta = \arctan(y/x)$

$$\Rightarrow \theta' = [\arctan(y/x)]' = \frac{1}{1+[y/x]^2}\cdot\left[\frac{y'x - yx'}{x^2}\right]$$

$$= \frac{\cancel{x^2}}{x^2+y^2}\left[\frac{\left(x + y\frac{f(r)}{r}\right)x - y\left(-y + x\frac{f(r)}{r}\right)}{\cancel{x^2}}\right]$$

$$= \left[x^2 + \cancel{\frac{xyf(r)}{r}} + y^2 - \cancel{\frac{xyf(r)}{r}}\right]\cdot\frac{1}{x^2+y^2} = 1 \quad //$$

Para $f(r) = (r-1)(r-2)(r-3)$ bosqueje el diagrama de fase del sistema no lineal en el plano xy. Describa el comportamiento de todas las soluciones con condición inicial $(x(0), y(0)) \neq (0,0)$. ¿Cuándo las soluciones son periódicas?

$\rightsquigarrow \theta'(t) = 1$ nos dice que giramos con $\vec{v}$. angular cnte. Además, podemos despejar: $\theta(t) = t + \theta_0$

$\left(\theta_0 = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right)$

$\rightsquigarrow r'(t) = f(r) = (r-1)(r-2)(r-3) \iff r'(t) = 0$ ssi

$r = 1, \; r = 2, \; r = 3$

Nuestro sist. tendrá 3 sols. Veamos que pasa entre estas sols.

		1	2	3
$r-1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$r-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$r-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
r'	$-$	$+$	$-$	$+$

$r' < 0$ me acerco

$r' > 0$ me alejo

El diagrama de fase nos queda

Las sols. son periódicas si $r(t) = 1$ (2 o 3) y $\theta(t) = t + \theta_0$