



Auxiliar 11.5: Pre Control

Se acabó el paro

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

P1.- Partícula La trayectoria $(x(t), y(t))$ de una partícula de masa unitaria satisface las ecuaciones:

$$\begin{aligned}x'' &= ay' \\ y'' &= -ax'\end{aligned}$$

con condiciones iniciales $x(0) = r_0, x'(0) = 0, y(0) = 0, y'(0) = ar_0$. Pruebe que la trayectoria de la partícula describe una circunferencia de radio r_0 . Indicación: Use la transformada de Laplace en ambas ecuaciones.

P2.- Límites

a) La siguiente ecuación modela la flexión de una barra con sección transversal homogénea y de largo L debido a una carga $w(x)$ está dada por $y^{(4)} = w(x)$ donde $y(x)$ es la flexión medida desde el eje. El propósito de este problema es estudiar como una barra responde a la carga unitaria aplicada de manera puntual en $x = \frac{L}{2}$, es decir, en el punto medio de la barra.

1) Resuelva $y^{(4)} = \delta_{\frac{L}{2}}$ cuando $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(L) = 0, y'''(L) = 0$. Las condiciones en 0 y L modelan que la barra esta empotrada en un extremo y libre en el otro (como un trampolín). Grafique la solución y explique que ocurre.

2) Resuelva $y^{(4)} = \delta_{\frac{L}{2}}$ cuando $y(0) = 0, y'(0) = 0, y(L) = 0, y'(L) = 0$. Las condiciones en 0 y L modelan que la barra esta empotrada en ambos extremos. Grafique la solución y explique que ocurre.

b) Considere la ecuación $y'' + 2y' + 2y = f$ con condición inicial $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Considere $f = c\delta_T$. Determine todos los posibles valores de T y correspondientes c para que $y(t) = 0$ para todo $t > T$.

P3.- Delta de Dirac

P4.- De vuelta a las EDOs

Resumen

Def. 1 (Transformada de Laplace): Dada $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se llama transformada de Laplace de f a la función:

$$L[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

que asocia a $s \in \mathbb{R}$ el valor $L[f](s)$ cuando la integral converge.

Def. 2 (Asíntota de la Transformada): Si la transformada de Laplace de una función existe para $s > c$, a la mínima cota c se le llama asíntota de la transformada.

Prop. 1: La transformada de Laplace es un operador lineal. Es decir, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y si f y g son funciones de $[0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$ tales que $L[f](s)$ y $L[g](s)$ existen, entonces:

$$L[f + \lambda g](s) = L[f](s) + \lambda L[g](s).$$

Def. 3 (Discontinuidad de Salto): Una función f tiene una discontinuidad de salto en $a \in \text{Dom}(f)$ si los límites laterales $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existen, son finitos y distintos.

Def. 4 (Continua por pedazos): Una función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice continua por pedazos si tiene un número finito o numerable de discontinuidades de salto en $[0, +\infty)$, pero sobre cada subintervalo acotado de $[0, +\infty)$ tiene a lo más un número finito de estas.

Def. 5 (Orden exponencial): Una función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es de orden exponencial si existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para todo $t \geq 0$. Al menor de tales α se le llama orden exponencial de f . Gráficamente, el hecho de tener orden exponencial significa que la función está encerrada entre $Me^{\alpha t}$ y $-Me^{\alpha t}$.

Def. 6 (C_α): El espacio C_α es el conjunto de las funciones $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que son continuas por pedazos y de orden exponencial α . Es un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones de $[0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$.

Prop. 2: Si $f \in C_\alpha$ entonces para todo $s > \alpha$, existe $L[f](s)$ (y converge absolutamente). Además:

$$|L[f](s)| \leq \frac{M}{s - \alpha}$$

para todo $s > \alpha$. En particular, $\lim_{s \rightarrow +\infty} L[f(t)](s) = 0$.

Teo. 1 (Función escalon de Heaviside y su transformada): Se define como:

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

Si $a = 0$, entonces la denotamos simplemente como H . Su transformada de Laplace es:

$$L[H_a](s) = \frac{1}{s} e^{-as}$$

Teo. 2: Si $F(s) = L[f](s)$, y $a > 0$ entonces:

$$L[f(t - a)H(t - a)](s) = e^{-as} F(s)$$

Prop. 3 (Fórmulas de traslación): Las fórmulas:

1. $L[e^{at} f(t)](s) = F(s - a)$, con $L[f(t)](s) = F(s)$
2. $L[H(t - a) f(t - a)](s) = e^{-as} L[f](s)$

Se les llama fórmulas de traslación.

Prop. 4: Sea $f \in C_\alpha$ derivable n veces. Entonces, para la derivada n -ésima su transformada de Laplace es:

$$L[f^{(n)}](s) = s^n L[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0^+)$$

Teo. 3 (Delta de Dirac y su transformada): Se define como:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0 \end{cases}$$

Si $a = 0$, entonces la denotamos simplemente como δ . Su transformada de Laplace es:

$$L[\delta(t - t_0)](s) = e^{-st_0}$$

a) La siguiente ecuación modela la flexión de una barra con sección transversal homogénea y de largo L debido a una carga $w(x)$ está dada por $y^{(4)} = w(x)$ donde $y(x)$ es la flexión medida desde el eje. El propósito de este problema es estudiar como una barra responde a la carga unitaria aplicada de manera puntual en $x = \frac{L}{2}$, es decir, en el punto medio de la barra.

1) Resuelva $y^{(4)} = \delta_{\frac{L}{2}}$ cuando $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(L) = 0, y'''(L) = 0$. Las condiciones en 0 y L modelan que la barra esta empotrada en un extremo y libre en el otro (como un trampolín). Grafique la solución y explique que ocurre.

$$\mathcal{L}[y^{(4)}] = \mathcal{L}[\delta_{\frac{L}{2}}]$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0^+)$$

$$s^4 \mathcal{L}[y] - \underbrace{y'''(0)}_{c_1} - s \underbrace{y''(0)}_{c_2} - \cancel{s^2 y'(0)}^{\rightarrow 0} - \cancel{s^3 y(0)}^{\rightarrow 0} = e^{-\frac{L}{2}s}$$

$$= e^{-\frac{L}{2}s}$$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s - \lambda}$
$H_a(t)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$
$P_{ab}(t)$	$\frac{1}{s} (e^{-as} - e^{-bs})$
$e^{\lambda t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(s - \lambda)^k}$
$\frac{e^{\sigma t}}{w} \sin(wt)$	$\frac{1}{(s - \sigma)^2 + w^2}$
$e^{\sigma t} \cos(wt)$	$\frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + w^2}$
$t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
$\frac{1}{a} \sin(at) - t \cos(at)$	$\frac{2a^2}{(s^2 + a^2)^2}$

$$s^4 \mathcal{L}[y] - c_1 - s c_2 = e^{-\frac{L}{2}s}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{e^{-\frac{L}{2}s}}{s^4} + \frac{c_1}{s^4} + \frac{c_2}{s^3}$$

$$a = L/2$$

$$= e^{-\frac{L}{2}s} \mathcal{L}\left[\frac{t^3}{6}\right] + c_1 \mathcal{L}\left[\frac{t^3}{6}\right] + c_2 \mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2}\right]$$

$$2. \mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as} \mathcal{L}[f](s)$$

$$y(t) = H\left(t - \frac{L}{2}\right) \frac{\left(t - \frac{L}{2}\right)^3}{6} + c_1 \frac{t^3}{6} + c_2 \frac{t^2}{2}$$

Busquemos c_1 y c_2 tenemos

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

$$y'(t) = \cancel{\delta\left(t - \frac{L}{2}\right)}^{\rightarrow 0} \frac{\left(t - \frac{L}{2}\right)^3}{6} + H\left(t - \frac{L}{2}\right) \frac{\left(t - \frac{L}{2}\right)^2}{\cancel{L/2}} \cdot \cancel{3}^{\rightarrow 1} + c_1 \frac{3t^2}{L/2} + c_2 \cdot t$$

nos desacemos de la delta por la evaluamos después en L así que no nos sirve

→ PARA efectos de este ejercicio.

$$y'' = \cancel{\delta\left(t - \frac{L}{2}\right)}^{\rightarrow 0} \frac{\left(t - \frac{L}{2}\right)^2}{2} + H\left(t - \frac{L}{2}\right) \left(t - \frac{L}{2}\right) + c_1 t + c_2$$

→ Truco pero se hace en control
→ Prohibido en el dim

$$y''' = \delta\left(t - \frac{L}{2}\right) \left(t - \frac{L}{2}\right) + H\left(t - \frac{L}{2}\right) \cdot 1 + c_1$$

$$\rightarrow y''(L) = L - \frac{L}{2} + C_1 L + C_2 = 0$$

$$\rightarrow y'''(L) = 1 + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = -1$$

$$\rightarrow \frac{L}{2} - L + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = \frac{L}{2}$$

$$H'' = H''' = 0$$

NO siempre en este ejercicio

esto se formaliza con distribuciones del dim

2) Resuelva $y^{(4)} = \delta_{\frac{L}{2}}$ cuando $y(0) = 0, y'(0) = 0, y(L) = 0, y'(L) = 0$. Las condiciones en 0 y L modelan que la barra esta empotrada en ambos extremos. Grafique la solución y explique que ocurre.

Al igual que antes:

$$s^4 L[y] - \underbrace{y''''(0)}_{C_1} - s \underbrace{y'''(0)}_{C_2} - s^2 \cancel{y''(0)}^0 - s^3 \cancel{y'(0)}^0 = e^{-s \frac{L}{2}}$$

Así

$$L[y] = \frac{e^{-s \frac{L}{2}}}{s^4} - \frac{C_1}{s^4} - \frac{C_2}{s^3}$$

$$= e^{-s \frac{L}{2}} L\left[\frac{x^3}{3!}\right] + C_1 L\left[\frac{x^3}{3!}\right] + C_2 L\left[\frac{x^2}{2!}\right]$$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s - \lambda}$
$H_a(t)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$
$P_{ab}(t)$	$\frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$
$e^{\lambda t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(s - \lambda)^k}$
$\frac{e^{\sigma t}}{w} \sin(wt)$	$\frac{1}{(s - \sigma)^2 + w^2}$
$e^{\sigma t} \cos(wt)$	$\frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + w^2}$
$t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
$\frac{1}{a} \sin(at) - t \cos(at)$	$\frac{2a^2}{(s^2 + a^2)^2}$

$$\Leftrightarrow y(x) = H\left(x - \frac{L}{2}\right) \frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)^3}{3!} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2}$$

Queremos ver cuánto valen las CTS.

$$y(L) = H\left(L - \frac{L}{2}\right) \frac{\left(L - \frac{L}{2}\right)^3}{6} + \frac{C_1 L^3}{6} + \frac{C_2 L^2}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{L^3}{8} + C_1 L^3 + C_2 L^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow C_2 = -\frac{L}{8} - C_1 L$$

$$y'(t) = 5 \cancel{(t - L/2)} \cdot \frac{(t - L/2)^3}{6} + 3 \cancel{H(t - \frac{L}{2})} \frac{(t - L/2)^2}{6^2}$$

$$+ \frac{3C_1 t^2}{6} + \frac{2C_2 t}{6}$$

$$y'(L) = \frac{\cancel{L^2}}{4 \cdot 2} + \frac{C_1 \cancel{L^2}}{2} + \frac{C_2 \cancel{L}}{3} = 0 \quad | \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2$$

$$(\Rightarrow) \quad 3L + 12C_1L + 8C_2 = 0$$

$$3L + 12C_1L + 8 \left[-\frac{L}{8} - C_1L \right] = 0$$

$$3L + 12C_1L - L - 8C_1L = 0$$

$$2L + 4C_1L = 0$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}$$

$$C_2 = -\frac{L}{8} + \frac{4L}{8} = \frac{3L}{8}$$

b) Considere la ecuación $y'' + 2y' + 2y = f$ con condición inicial $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Considere $f = c\delta_T$. Determine todos los posibles valores de T y correspondientes c para que $y(t) = 0$ para todo $t > T$.

$$s^2 L[y] - y'(0) + 2s L[y] + 2L[y] = c e^{Ts}$$

$$L[y] = \frac{c e^{Ts} + 1}{s^2 + 2s + 1 + 1} = \frac{c e^{Ts} + 1}{(s+1)^2 + 1}$$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s - \lambda}$
$H_a(t)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$
$P_{ab}(t)$	$\frac{1}{s} (e^{-as} - e^{-bs})$
$e^{\lambda t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(s - \lambda)^k}$
$\frac{e^{\sigma t}}{w} \sin(wt)$	$\frac{1}{(s - \sigma)^2 + w^2}$
$e^{\sigma t} \cos(wt)$	$\frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + w^2}$
$t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
$\frac{1}{a} \sin(at) - t \cos(at)$	$\frac{2a^2}{(s^2 + a^2)^2}$

2. $L[H(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as} L[f](s)$

$$L[y] = e^{Ts} c \mathcal{L}[e^{-t} \sin(t)] + \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

$\sigma = -1$
 $w = 1$

$$\Rightarrow y = c H(t-T) e^{-(t+T)} \sin(t-T) + e^{-t} \sin(t)$$

$$y(t) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = c e^{-T-t} (\sin(t) \cos(T) - \cos(t) \sin(T)) + e^{-t} \sin(t) = 0$$

$$\Rightarrow -\sin(t) = c e^{-T} (\sin(t) \cos(T) - \cos(t) \sin(T))$$

$(-1)^k$

Notamos que si $T = \pm k\pi$

Entonces si

k PAV

$$c = -e^T$$

k IMPAV

$$c = e^T$$