Auxiliar 11: Sistemas lineales de orden n

Matraquero

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

P1.- **Bacterias** La evolución en el tamaño de la población de dos tipos de bacterias se puede modelar por el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$$

a) Resuelva el sistema lineal e indique la evolución de cada población.
b) Muestre que para cualquier solución inicial la población de bacterias desaparece cuando el tiempo $t \to \infty$.

P2.- **Variación de parámetros con coeficientes constantes**
Resuelva los siguientes sistemas:

(a) $\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - 3y + 4 \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 2y - 1 \end{aligned}$

(b) $X' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X + \binom{1}{-1} e^t$

(c) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ te^{3t} \end{pmatrix}$

P3.- **Teorema de Liouville** Dada una matriz A de $n \times n$ funciones continuas de matriz traspuesta A^T, nos interesa relacionar las soluciones de los dos sistemas lineales a coeficientes variables siguientes: (1) $X' = A(t)X$, (2) $Y' = -A^T(t)Y$.

Para ello: a) Pruebe que si $M(t)$ es una matriz de $n \times n$ coeficientes C^1, invertible para todo t, entonces:

$$\frac{d}{dt} M^{-1}(t) = -M^{-1}(t) \left(\frac{d}{dt} M(t) \right) M^{-1}(t).$$

b) Si Φ y Ψ son las matrices fundamentales canónicas de (1) y (2) respectivamente, pruebe que:

$$\Psi = \left(\Phi^{-1} \right)^T.$$

c) A partir de lo anterior justifique claramente por qué las filas de Φ^{-1} conforman una base de soluciones para (2).

Resumen

Def. 1 (L.I.): Las funciones $y_1, ..., y_k$ en $C^n(I)$ son linealmente independientes (l.i.) si la afirmación:

$$C_1 y_1(x) + \cdots + C_k y_k(x) \equiv 0, \forall x \in I$$

implica necesariamente que todos los coeficientes C1, . . . , Ck son cero. Si por el contrario existen C1,...,Ck tales que al menos uno es distinto de cero y se tiene (27), decimos que las funciones y1, . . . , yk son linealmente dependientes (l.d.).

Def. 2 (Espacio sols. homogéneas): Denotemos por $\mathcal{H}$ el conjunto de todas las soluciones de la ecuación homogénea:

$$\mathcal{H} = \{y \in C^n(I) : y^{(n)}(x) + \cdots + \bar{a}_1(x)y\prime(x) + \bar{a}_0(x)y(x) = 0 \forall x \in I\}.$$

Teo. 1: $\mathcal{H}$ es subespacio vectorial de $C^n(I)$ de dimensión n.

Def. 3 (Espacio sols. no homogéneas): Denotamos por $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial lineal de orden n no homogénea:

$$\mathcal{S} = \{y \in C^n(I) | y^{(n)} + \cdots + \bar{a}_1(x)y\prime + \bar{a}_0(x)y = \bar{Q} \forall x \in I\}$$

. **Def. 4 (Hiperplano):** Un hiperplano o subespacio afín es un conjunto de la forma:

$$x + A = \{z \in X | z = x + a \text{ para algún } a \in A\}.$$

Teo. 2: Si $y_p \in \mathcal{S}$ es cualquier solución de la ecuación no homogénea, entonces $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{H}$.

Cor. 1: Todo elemento de $\mathcal{S}$ se escribe de la forma:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y_p$$

donde $y_1, ..., y_n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea, y_p es cualquier solucion particular de la ecuación no homogénea y las $C_i \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias que dependen del vector de condiciones iniciales.

Def. 5 (Wronskiano): El Wronskiano asociado a n funciones $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$ es

$$W(x) = W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Notar que W es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en I. Usamos también la notación $W(y_1, \ldots, y_n)$ para enfatizar la dependencia de las funciones $y_1, \ldots, y_n$.

Lema. 1: El determinante es multilineal por filas y columnas.

Lema. 2: Sea $A(x)$ una matriz con entradas variables (dependientes de x). Como arriba escribimos $\det(A) = \det(F_1, F_2, \ldots, F_n) = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n)$, donde las F_i y las C_j son las filas y columnas de A, respectivamente. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|A(x)| &= \sum_{i=1}^{n} \det(F_1, \ldots, F_i', \ldots, F_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \det\left(C_1, \ldots, C_j', \ldots, C_n\right). \end{aligned}$$

Con esto, la técnica para derivar el determinante de una matriz es la siguiente:

1. Se deriva la primera fila (o columna) y se calcula el determinante de la matriz así obtenida.

2. Se hace lo mismo con cada una de las filas (o columnas) de la matriz.

3. Se suman los resultados parciales.

Teo. 4 (Fórmula de Abel): Sean $y_1, ..., y_n \in \mathcal{H}$. Entonces el Wronskiano W satisface:

$$W(x) = Cexp(-\int \bar{a}_{n-1}(x)dx)$$

con $C \in \mathbb{R}$. En particular, si se anula en un punto, se anula siempre.

Teo. 5 : Sean $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$

1. Si $W(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$ entonces $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente independientes.

2. En general, el que $W(x) = 0$ para todo $x \in I$ no basta para garantizar que $y_1, \ldots, y_n$ sean linealmente dependientes.

3. Si $y_1 \ldots, y_n$ son funciones en $\mathcal{H}$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) $W(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$;

b) $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$; y

c) $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente independientes.

P1.- **Bacterias** La evolución en el tamaño de la población de dos tipos de bacterias se puede modelar por el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$$

a) Resuelva el sistema lineal e indique la evolución de cada población.

Notamos que tenemos una EDO homogéneo

$$\begin{pmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$$

$$X'(t) = AX(t)$$

Calculemos los vectores y valores propios de la matriz:

- $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-3-\lambda) - 2$

$$= 6 + 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2 - 2 = 4 + 5\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \qquad \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -4$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 4) = 0$$

Calculemos los vectores propios:

- **Ker(A + I)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$-x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_1$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

Así: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} //$$

- **Ker(A + 4I)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad 2x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2x_1$$

Así: $\begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} x_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es $\vec{v}$. P.

Así, la solu$ general queda

$$P(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

'b) Muestre que para cualquier solución inicial la población de bacterias desaparece cuando el tiempo $t \to \infty$.

NOTAMOS que:

$$\lim_{t\to\infty} P_1(t) = \lim_{t\to\infty} (C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} P_2(t) = \lim_{t\to\infty} (-C_1 2 e^{-4t} + C_2 e^{-t}) = 0$$

Luego, la pobla$ se va a cero independiente de las condiciones iniciales.

P2.1

(a)
$$\frac{dx}{dt} = 3x - 3y + 4$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2y - 1$$

Comenzamos por escribir el sist. como una matriz:

$$X(t) = (x(t), y(t))^T$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 3y + 4 \\ 2x - 2y - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x - 3y \\ 2x - 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así, nos queda la ec. de la forma

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Una EDO no homogénea.

Resolvamos la EDO homogénea:

$$X'(t) - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X(t) = 0$$

Busquemos los v.p. de la matriz:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda)+6$$

$$= -6 - 3\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 6 = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1) = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1$ o $\lambda_2 = 0$

Encontramos los v.p, ahora busquemos los v.p.

- $\text{Ker}\{A-I\}$: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$2x = 3y \Leftrightarrow y = \tfrac{2}{3}x$$

Así: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{3}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} x$

Concluimos que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

- $\text{Ker}\{A-0\cdot I\}$ $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} 3x - 3y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y$$

Así, tenemos que $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Con lo que

$$X_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, escribimos la matriz fundamental como:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ 2e^t/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos Φ^{-1} como: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (ad-bc: determinante)

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{e^t - 2e^t/3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2e^t/3 & e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} & -3e^{-t} \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\left(\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\right)$

Ahora usamos variación de parámetros.

$$X_p(t) = \Phi(t) \cdot \int \Phi^{-1}(t) F(t)\, dt$$

Calculemos: $\Phi^{-1}(t) F(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-t} & -3e^{-t} \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

$2\times 2 \quad (2\times 1) \quad 2\times 1$

$$= \begin{bmatrix} 12e^{-t} + 3e^{-t} \\ -8 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15e^{-t} \\ -11 \end{bmatrix}$$

Así: $X_p = \Phi(t) \cdot \int \begin{bmatrix} 15e^{-t} \\ -11 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} e^t & 1 \\ 2e^t/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15e^{-t} \\ -11t \end{bmatrix}$

$2\times 2 \quad (2\times 1) \quad 2\times 1$

$$= \begin{bmatrix} -15 - 11t \\ 10 - 11t \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - 11t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que la sol. general es

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - 11t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) $\vec{X'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X + \binom{1}{-1} e^t$

Procedemos igual que antes

1. Calculamos la EDO homogénea:

$$X'(t) - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X(t) = 0$$

1.1 Calculamos los v.p.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda) + 2 = -3\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1$

1.2 Calculamos los $\vec{v}$. P.

• $\ker\{A-2I\}$ $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x = y$

Tenemos que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $\vec{v}$. P.

• $\ker\{A-I\}$ $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$

$x = 2y$

Así, encontramos el $\vec{v}$.P $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

La solup homogénea es de la forma:

$$X_h(t) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{t}$$

Luego, la matriz fundamental nos queda:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{t} \\ e^{2t} & 2e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

determinante

Calculamos su inversa para la variab de parámetros

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{2e^{3t} - e^{3t}}\begin{bmatrix} 2e^{t} & -e^{t} \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Usamos la variab de parámetros:

$$X_p(t) = \Phi(t)\cdot\int\begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{t} \\ -e^{t} \end{bmatrix}dt$$

Calculamos:

$$\begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{t} \\ -e^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} + e^{t} \\ -1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} \\ -2 \end{bmatrix}$$

2×2 $\quad$ 2×1

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{t} \\ e^{2t} & 2e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3e^{-t} \\ -2t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^{t} - 2e^{t}t \\ -3e^{t} - 4e^{t}t \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3e^t - 2e^t t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Final: la soluc es:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3e^t - 2e^t t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(c) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ te^{3t} \end{pmatrix}$

- Resolvemos la EDO homogénea calculando los v.p. de A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) - (3-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)^2(3-\lambda) - (3-\lambda) = (1 - 2\lambda + \lambda^2)(3-\lambda) - 3 + \lambda$$

$$= 3 - 6\lambda + 3\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 3 + \lambda$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 5\lambda - 6)$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{-2} = \frac{-5 \pm 1}{-2}$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

Buscamos los vectores propios asociados:

- $\ker\{A\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x = -y$, $z = 0$

Tenemos entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{es} \quad \vec{v}. \text{P.}$$

- $\text{Ker}\{A-2I\}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x = y \quad , \quad z = 0$

Así: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\vec{v}$. P.

- $\text{Ker}\{A-3I\}$ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-2x + y = 0 \iff y = 2x$

$x - 2y = 0$

$\Rightarrow x = 0 \, , \, y = 0$

z es libre, en particular elegimos $z = 1$

Nos queda $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $\vec{v}$. P.

Así, la solución nos queda:

$$X_h(t) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t} + C_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t}$$

La matriz fundamental nos queda:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} & 0 \\ -1 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

Busquemos su inversa:

$$\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & e^{2t} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & e^{2t} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{matrix} f_2' = f_2 + f_1 \\ \\ \\ \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & e^{2t} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{2t} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} f_1 \\ f_2' \\ f_3 \end{matrix}$$

$f_1' = f_1 - f_2'/2$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2e^{2t} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e^{-2t}/2 & e^{-2t}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e^{-3t} \end{array}\right)$$

Así:

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Aplicamos VARIAÇÃO de PARÂMETROS

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} & 0 \\ -1 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\int \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ te^{3t} \end{pmatrix} dt$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ te^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t - e^{2t} \\ e^{-t} + 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$3\times 3 \quad (3\times 1) \quad 3\times 1$

$$X_p = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{2t} & 0 \\ -1 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t - e^{2t}/2 \\ -e^{-t} + t \\ t^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t - e^{2t}/2 - e^t + te^{2t} \\ e^{2t}/2 - e^t - e^t + te^{2t} \\ e^{3t}t^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t + e^{2t}\begin{pmatrix} t - 1/2 \\ t + 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Finalv.:

$$X(t) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t} + C_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t + e^{2t}\begin{pmatrix} t - 1/2 \\ t + 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

P3.- Dada una matriz A de $n \times n$ funciones continuas de matriz traspuesta A^T, nos interesa relacionar las soluciones de los dos sistemas lineales a coeficientes variables siguientes: (1) $X' = A(t)X$, (2) $Y' = -A^T(t)Y$.

Para ello: a) Pruebe que si $M(t)$ es una matriz de $n \times n$ coeficientes C^1, invertible para todo t, entonces:

$$\frac{d}{dt}M^{-1}(t) = -M^{-1}(t)\left(\frac{d}{dt}M(t)\right)M^{-1}(t).$$

Sabemos $M(t)$ invertible (Tiene inversa)

$$M^{-1}(t)\,M(t) = I \;/\; d/dt$$

$$\frac{dM^{-1}(t)}{dt}\cdot M(t) + M^{-1}(t)\frac{dM(t)}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dM^{-1}(t)}{dt} = -M^{-1}(t)\left[\frac{dM(t)}{dt}\right]M^{-1}(t) \;//$$

b) Si Φ y Ψ son las matrices fundamentales canónicas de (1) y (2) respectivamente, pruebe que:

$$\Psi = \left(\Phi^{-1}\right)^T.$$

Sabemos por la parte (a) que:

$$\frac{d\,\Phi^{-1}(t)}{dt} = \Phi^{-1}(t)\,\frac{d\Phi}{dt}\,\Phi^{-1}(t)$$

Además, como prop. de la matriz fundamental:

$$\Phi' = A\Phi$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi^{-1}}{dt} = \Phi^{-1}A\Phi\Phi^{-1} = \Phi^{-1}(t)A$$

Trasponemos:

$$\left(\frac{d\Phi^{-1}}{dt}\right)^T = A^T\left(\Phi^{-1}(t)\right)^T$$

Por prop. de la soluc fundamental

$$\Psi(t) = \left(\Phi^{-1}(t)\right)^T$$

Matriz fundamental de (2)

Para ver que es canónica, tenemos

$$\Psi(0) = \left(\Phi^{-1}(0)\right)^T = \left(I^{-1}\right)^T = I$$

c) A partir de lo anterior justifique claramente por qué las filas de Φ^{-1} conforman una base de soluciones para (2).

Sabemos que la sol. de (2) es de la forma:

$$Y = \Psi(t)C$$

Donde C es una matriz de cts. Sabemos entonces que la solución es una combinación lineal de las columnas de Ψ, que a su vez son las filas de Φ^{-1}.