

Auxiliar 12: Diagramas de Fase

Dibujitos

Profesor: Michal Kowalczyk

Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

P1.- Tanques de líquido Dos tanques, cada uno con 50 litros de líquido, están conectados entre sí mediante tubos, de modo que el líquido pasa del tanque A al tanque B a razón de 4 litros/minuto, y del tanque B al tanque A a 1 litro/minuto (figura 1). El líquido dentro de cada tanque se mantiene bien revuelto. Por otro lado, entra agua pura al tanque A a razón de 3 litros/minuto, y la solución sale del tanque B a 3 litros/minuto. Si en un principio el tanque A contiene 25 kg de sal y el tanque B no contiene sal (sólo agua), determine la masa de sal en cada tanque en el instante $t \geq 0$. Grafique en el mismo plano las dos cantidades $x_1(t)$ y $x_2(t)$, donde $x_1(t)$ es la masa de sal en el tanque A y $x_2(t)$ es la masa de sal en el tanque B.

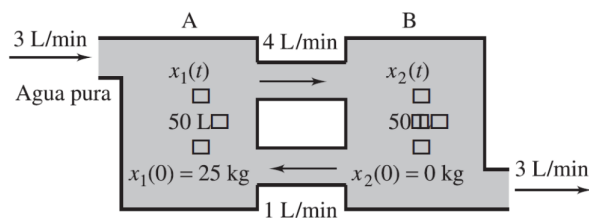


Figura 1

P2.- Coordenadas Polares Cierta sist. no lineal autónoma, al ser expresado en coordenadas polares queda de la forma

$$\begin{cases} r' = \frac{3-r}{2} \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

Denotemos $X(t) = (r(t), \theta(t))$. Determine y bosqueje las trayectorias que satisfacen las condiciones $X(0) = (0, 1)$, $X(0) = (3, 0)$ y $X(0) = (4, 0)$

P3.- Sols. Periódicas Considere el sistema

$$x' = -y + x \frac{f(r)}{r}, \quad y' = x + y \frac{f(r)}{r},$$

para $(x, y) \neq (0, 0)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Considere el cambio de variables a coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Demuestre que

$$\theta' = 1 \quad \text{y} \quad r' = f(r).$$

Para $f(r) = (r-1)(r-2)(r-3)$ bosqueje el diagrama de fase del sistema no lineal en el plano xy . Describa el comportamiento de todas las soluciones con condición inicial $(x(0), y(0)) \neq (0, 0)$. ¿Cuándo las soluciones son periódicas?

Resumen

Prop. 1 (Principio de Superposición): Sean $X_1, \dots, X_n$ soluciones de la EDO homogénea, entonces la combinación lineal:

$$X(t) = X_1(t), \dots, X_n(t)$$

También es una solución.

Def. 1 (Matriz Fundamental): Escribimos:

$$\Phi(t) = (X_1(t) | \dots | X_n(t))$$

La matriz cuyas columnas son soluciones de la EDO. Además:

$$X(t) = C\Phi$$

Donde C es una matriz de constantes.

Prop. 2: La matriz fundamental tiene la siguiente propiedad:

$$\Phi' = A\Phi$$

Teo. 1 (Variación de Parámetros): La solución particular de la EDO se deduce como:

$$X_p(t) = \Phi \int \Phi^{-1} F(t)$$

Def. 2 (SNLA): Dados un intervalo abierto I y una función $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con condición inicial $X_0 \in \mathbb{R}^n$ en $t_0 \in I$:

$$\begin{cases} X'(t) = F(t, X(t)), & t \in I \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Si la función F no es lineal con respecto a la variable X , se dirá que es un sistema no lineal (SNL). Si además F no depende explícitamente de la variable t , se dirá que es un sistema no lineal autónomo (SNLA). Usaremos los SNLA de la forma:

$$\begin{cases} x'(t) = F(x, y), & x(t_0) = x_0 \\ y'(t) = G(x, y), & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Prop. 3: Un SNLA es invariante bajo traslaciones temporales (variable t).

Def. 3 (Vector de Estado): El vector $X(t) \in \mathbb{R}^n$, que es la solución del sistema en un punto $t \in I$, se llama vector de estado.

Obs. 1: Dada una función $h : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

toda ecuación de orden superior de la forma:

$$y^{(n)} = h(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

se puede llevar, mediante un cambio de variables, a la forma (SNL). Claramente, si h no depende explícitamente de t , se puede llevar a la forma (SNLA).

Def. 4 (Nuclinas): Se llama nulclina en x a la curva definida por $F(x, y) = 0$ y nulclina en y a la curva definida por $G(x, y) = 0$.

Def. 5 (Punto Crítico o de Equilibrio): Decimos que $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto crítico o de equilibrio del (SNLA) si:

$$\begin{cases} F(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \\ G(\bar{x}, \bar{y}) = 0. \end{cases}$$

Es decir, la intersección de las nuclinas. El conjunto de puntos críticos se denota como:

$$C = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}.$$

Def. 6 (Sistema Linealizado): Consideramos un sistema linealizado (SL):

$$\begin{cases} x' = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}), \\ y'(t) = c(x - \bar{x}) + d(y - \bar{y}), \end{cases}$$

Donde $(\bar{x}, \bar{y})$ es punto crítico.

Def. 7 (SNLA degenerado): Un sistema (SNLA) es degenerado en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$ si $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$.

Def. 8 (Puntos Críticos aislados o densos): Un punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ de (SNLA) es aislado si existe $\delta > 0$ tal no hay ningún otro punto crítico en la bola de centro $(\bar{x}, \bar{y})$ y radio δ . De lo contrario se dice que los puntos críticos son densos en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$.

Prop. 4: Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto crítico de (SNLA).

1. Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$, entonces $(\bar{x}, \bar{y})$ es el único punto crítico de (SL). En particular es aislado para (SL).
2. Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$, entonces los puntos críticos de (SL) son densos en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$. Más precisamente, el conjunto C es una recta que contiene a $(\bar{x}, \bar{y})$ si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0_{2 \times 2}$ y es todo el plano si $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0_{2 \times 2}$.
3. Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$ entonces $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto crítico aislado de (SNLA).