Auxiliar 11.5: Pre Control

Se acabó el paro

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

P1.- **Partícula** La trayectoria $(x(t), y(t))$ de una partícula de masa unitaria satisface las ecuaciones:

$$x'' = ay'$$
$$y'' = -ax'$$

con condiciones iniciales $x(0) = r_0, x'(0) = 0, y(0) = 0, y'(0) = ar_0$. Pruebe que la trayectoria de la partícula describe una circunferencia de radio r_0. Indicación: Use la transformada de Laplace en ambas ecuaciones.

Resumen

Def. 1 (Transformada de Laplace): Dada $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ se llama transformada de Laplace de f a la función:

$$L[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

que asocia a $s \in \mathbb{R}$ el valor $L[f](s)$ cuando la integral converge.

Def. 2 (Asíntota de la Transformada): Si la transformada de Laplace de una función existe para $s > c$, a la mínima cota c se le llama asíntota de la transformada.

Prop. 1: La transformada de Laplace es un operador lineal. Es decir, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y si f y g son funciones de $[0,+\infty)$ en $\mathbb{R}$ tales que $L[f](s)$ y $L[g](s)$ existen, entonces:

$$L[f + \lambda g](s) = L[f](s) + \lambda L[g](s).$$

Def. 3 (Discontinuidad de Salto): Una función f tiene una discontinuidad de salto en $a \in Dom(f)$ si los límites laterales $lím_{x\to a^+} f(x)$ y $lím_{x\to a^-} f(x)$ existen, son finitos y distintos.

Def. 4 (Continua por pedazos): Una función $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ se dice continua por pedazos si tiene un número finito o numerable de discontinuidades de salto en $[0,+\infty)$, pero sobre cada subintervalo acotado de $[0,+\infty)$ tiene a lo más un número finito de estas.

Def. 5 (Orden exponencial): Una función $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ es de orden exponencial si existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para todo $t \geq 0$.Al menor de tales α se le llama orden exponencial de f. Gráficamente, el hecho de tener orden exponencial significa que la función está encerrada entre $Me^{\alpha t}$ y $-Me^{\alpha t}$.

Def. 6 (C_α): El espacio C_α es el conjunto de las funciones $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ que son continuas por pedazos y de orden exponencial α. Es un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones de $[0,+\infty)$ en $\mathbb{R}$.

Prop. 2: Si $f \in C_\alpha$ entonces para todo $s > \alpha$, existe $L[f](s)$ (y converge absolutamente). Además:

$$|L[f](s)| \leq \frac{M}{s-\alpha}$$

para todo $s > \alpha$. En particular, $lím_{s\to+\infty} L[f(t)](s) = 0$.

Teo. 1 (Función escalon de Heaviside y su transformada): Se define como:

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a \end{cases}$$

Si $a = 0$, entonces la denotamos simplemente como H. Su transformada de Laplace es:

$$L[H_a](s) = \frac{1}{s} e^{-as}$$

Teo. 2: Si $F(s) = L[f](s)$, y $a > 0$ entonces:

$$L[f(t-a)H(t-a)](s) = e^{as} F(s)$$

Prop. 3 (Fórmulas de traslación): Las fórmulas:

1. $L[e^{at} f(t)](s) = F(s-a)$, con $L[f(t)](s) = F(s)$
2. $L[H(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as} L[f](s)$

Se les llama fórmulas de traslación.

Prop. 4: Sea $f \in C_\alpha$ derivable n veces. Entonces, para la derivada n-ésima su tranformada de Laplace es:

$$L[f^{(n)}](s) = s^n L[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{n-k-1}(0^+)$$

Teo. 3 (Delta de Dirac y su transformada): Se define como:

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} +\infty & si \quad t = t_0 \\ 0 & si \quad t \neq t_0 \end{cases}$$

Si $a = 0$, entonces la denotamos simplemente como δ. Su transformada de Laplace es:

$$L[\delta(t-t_0)](s) = e^{-st_0}$$

P1.- **Partícula** La trayectoria $(x(t), y(t))$ de una partícula de masa unitaria satisface las ecuaciones:

$$x'' = ay'$$
$$y'' = -ax'$$

con condiciones iniciales $x(0) = r_0, x'(0) = 0, y(0) = 0, y'(0) = ar_0$. Pruebe que la trayectoria de la partícula describe una circunferencia de radio r_0. Indicación: Use la transformada de Laplace en ambas ecuaciones.

Siguiendo la indicad, aplicamos transformada de Laplace.

$$L[f^{(n)}](s) = s^n L[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{n-k-1}(0^+)$$

$$\mathcal{L}[x''] = \mathcal{L}[ay']$$

$$\Leftrightarrow s^2 L[x] - \cancel{x'(0)}^{0} - s x(0^+) = a(sL[y] - \cancel{y(0^+)}^{0})$$

$$\Leftrightarrow s^2 L[x] - s r_0 = a s L[y] \quad (i)$$

Equivalente%

$$L[y''] = L[-ax']$$

$$\Leftrightarrow s^2 L[y] - y'(0) - s\cancel{y(0^+)}^{0} = -a(sL[x] - x(0^+))$$

$$\Leftrightarrow s^2 L[y] - a r_0 = -a s L[x] + a r_0 \quad (ii)$$

Ahora podemos despejar $L[x]$ e $L[y]$. De (i) tenemos:

$$sL[y] = \frac{s^2}{a} L[x] - \frac{s r_0}{a}$$

Reemplazando

$$s\left[\frac{s^2 L[x]}{a} - \frac{s r_0}{a}\right] + asL[x] = 2ar_0$$

$$\Leftrightarrow L[x][s^3 + a^2 s] = 2a^2 r_0 + s^2 r_0$$

$$\Leftrightarrow L[x] = \frac{r_0(2a^2 + s^2)}{s(s^2 + a^2)}$$

Usaremos fracciones parciales:

$$\frac{r_0(2a^2+s^2)}{s(s^2+a^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + a^2}$$

$$\Leftrightarrow r_0 2a^2 + r_0 s^2 = As^2 + Aa^2 + Bs^2 + Cs$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 r_0 + r_0 s^2 = (A+B)s^2 + Cs + Aa^2$$

$\rightarrow A + B = r_0 \qquad \rightarrow C = 0 \qquad \rightarrow A = 2r_0$

$\Leftrightarrow B = -r_0$

Luego,

$$L[X] = \frac{2r_0}{s} - \frac{r_0 s}{(s^2+a^2)}$$

$\sigma = 0$
$w = a$

$$= 2r_0 L[1] - r_0 L[\cos(at)]$$

$$\Rightarrow X(t) = 2r_0 - r_0 \cos(at)$$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s-\lambda}$
$H_a(t)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$P_{ab}(t)$	$\frac{1}{s}(e^{-as}-e^{-bs})$
$e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(s-\lambda)^k}$
$\frac{e^{\sigma t}}{w}\operatorname{sen}(wt)$	$\frac{1}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$e^{\sigma t}\cos(wt)$	$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$t\operatorname{sen}(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{1}{a}\operatorname{sen}(at)-t\cos(at)$	$\frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2}$

Despejemos $L[Y]$ de (i)

$$\cancel{s^2}\left[\frac{r_0(2a^2+s^2)}{\cancel{s}(s^2+a^2)}\right] - \cancel{s}r_0 = a\cancel{s}L[Y]$$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s-\lambda}$
$H_a(t)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$P_{ab}(t)$	$\frac{1}{s}(e^{-as}-e^{-bs})$
$e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(s-\lambda)^k}$
$\frac{e^{\sigma t}}{w}\operatorname{sen}(wt)$	$\frac{1}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$e^{\sigma t}\cos(wt)$	$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$t\operatorname{sen}(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{1}{a}\operatorname{sen}(at)-t\cos(at)$	$\frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2}$

$\sigma = 0$
$w = a$

$$\Leftrightarrow L[Y] = \frac{r_0}{a}\left[\frac{2a^2+s^2}{s^2+a^2}\right] - \frac{r_0}{a}$$

$$= \frac{r_0}{a}\left[\frac{a^2+a^2+s^2}{s^2+a^2}\right] - \frac{r_0}{a}$$

$$= \frac{r_0}{a}\left[\frac{a^2}{s^2+a^2}\right] + \cancel{\frac{r_0}{a}}\left[\cancel{\frac{a^2+s^2}{a^2+s^2}}^{1}\right] - \cancel{\frac{r_0}{a}}$$

$$= ar_0 L\left[\frac{\sin(at)}{a}\right]$$

Así: $Y(t) = r_0 \sin(at)$ //

Luego, la trayectoria de la partícula se describe como:

$$X(t) = 2r_0 - r_0\cos(at)$$
$$Y(t) = r_0 \sin(at)$$

Recordamos que la ec. de la circunferencia es de la forma $(X-a)^2+(Y-b) = r^2$. En este caso, usaremos $a = 2r_0$ y $b = 0$

$$V_0^2\cos^2(a t) + V_0^2\sin^2(a t) = V_0(\cos^2(t)+\sin^2(t))$$
$$= V_0 //$$

Luego, se describe una circunferencia de radio V_0 //