

Auxiliar 11: Sistemas lineales de orden n

Matraquero

Profesor: Michal Kowalczyk
 Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

P1.- Bacterias La evolución en el tamaño de la población de dos tipos de bacterias se puede modelar por el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$$

- Resuelva el sistema lineal e indique la evolución de cada población.
- Muestre que para cualquier solución inicial la población de bacterias desaparece cuando el tiempo $t \rightarrow \infty$.

P2.- Variación de parámetros con coeficientes constantes
 Resuelva los siguientes sistemas:

$$(a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 3y + 4 \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y - 1 \end{cases}$$

$$(b) X' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

$$(c) X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ te^{3t} \end{pmatrix}$$

P3.- Matriz Fundamental Dada una matriz A de $n \times n$ funciones continuas de matriz traspuesta A^T , nos interesa relacionar las soluciones de los dos sistemas lineales a coeficientes variables siguientes:

$$X' = A(t)X \tag{1}$$

$$Y' = -A^T(t)Y \tag{2}$$

- Pruebe que si $M(t)$ es una matriz de $n \times n$ coeficientes C^1 , invertible para todo t , entonces:

$$\frac{d}{dt} M^{-1}(t) = -M^{-1}(t) \left(\frac{d}{dt} M(t) \right) M^{-1}(t).$$

- Si Φ y Ψ son las matrices fundamentales canónicas de (1) y (2) respectivamente, pruebe que:

$$\Psi = (\Phi^{-1})^T.$$

- A partir de lo anterior justifique claramente por qué las filas de Φ^{-1} conforman una base de soluciones para (2).

Resumen

Def. 1 (Sist. lineal homogéneo de orden n): Sea $A(t)$ una matriz $(a_{ij}(t))$ cuadrada $n \times n$ de funciones continuas. El sistema de EDO:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n \end{aligned}$$

Con variables $x_1, \dots, x_n$ desconocidas, se denomina sist. lineal homogéneo y lo denotamos simplemente como:

$$X(t) = AX'(t)$$

Donde $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$

Def. 2 (Sist. lineal NO homogéneo de orden n): Sea $A(t)$ una matriz $(a_{ij}(t))$ cuadrada $n \times n$ de funciones continuas. Sean también $f_1(t), \dots, f_n(t)$ funciones continuas. El sistema de EDO:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned}$$

Con variables $x_1, \dots, x_n$ desconocidas, se denomina sist. lineal NO homogéneo y lo denotamos como:

$$X(t) = AX'(t) + F(t)$$

Donde $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ y $F(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$

Def. 3 (Problema de Cauchy): Dadas la función matricial $A(t)$ y función vectorial $F(t)$ ambas continuas en un intervalo I que contiene a t_0 definimos el problema de Cauchy mediante:

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + F(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Donde $X(t_0) = (X_1(t_0), \dots, X_n(t_0))^T$ es dado.

Teo. 1: Existe una solución única del problema de valor inicial en el intervalo I .

Def. 4 (l.d y l.i): Sean $X_1, \dots, X_n$ soluciones del sistema lineal homogéneo. Se dice que el sistema es linealmente dependiente si existen $c_1, \dots, c_n$ no todas cero tales que:

$$c_1X_1 + \dots + c_nX_n = 0$$

Si el sist. no es l.d, entonces es linealmente independiente (l.i).

Def. 5 (Wronskiano): El Wronskiano asociado a n funciones $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$ es

$$W(x) = W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Notar que W es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en I . Usamos también la notación $W(y_1, \dots, y_n)$ para enfatizar la dependencia de las funciones $y_1, \dots, y_n$.

Teo. 2 (Fórmula de Abel): Sean $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{H}$. Entonces el Wronskiano W satisface:

$$W(x) = C \exp\left(-\int \bar{a}_{n-1}(x)dx\right)$$

con $C \in \mathbb{R}$. En particular, si se anula en un punto, se anula siempre.

Teo. 3 : Sean $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$

1. Si $W(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$ entonces $y_1, \dots, y_n$ son linealmente independientes.

2. En general, el que $W(x) = 0$ para todo $x \in I$ no basta para garantizar que $y_1, \dots, y_n$ sean linealmente dependientes.

3. Si $y_1, \dots, y_n$ son funciones en $\mathcal{H}$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) $W(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$;

b) $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$; y

c) $y_1, \dots, y_n$ son linealmente independientes.

Prop. 1 (Principio de Superposición): Sean $X_1, \dots, X_n$ soluciones de la EDO homogénea, entonces la combinación lineal:

$$X(t) = X_1(t), \dots, X_n(t)$$

También es una solución.

Def. 6 (Matriz Fundamental): Escribimos:

$$\Phi(t) = (X_1(t) | \dots | X_n(t))$$

La matriz cuyas columnas son soluciones de la EDO. Además:

$$X(t) = C\Phi$$

Donde C es una matriz de constantes.

Prop. 2: La matriz fundamental tiene la siguiente propiedad:

$$\Phi' = A\Phi$$

Teo. 4 (Variación de Parámetros): La solución particular de la EDO se deduce como:

$$X_p(t) = \Phi \int \Phi^{-1}F(t)$$