Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-6 – Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Auxiliar 9: Laplace variado

Virtual

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

P1.- **Cohete a la luna** Un cohete despega con velocidad inicial v_0 desde la Tierra en forma vertical. Luego de algunos segundos, se activan los motores de emergencia, por lo que adquiere una aceleración $a > 0$ durante un intervalo de tiempo breve. Si la gravedad de la Tierra es g, encuentre la ecuación de movimiento del cohete suponiendo que tiene masa m y (t1, t2) es el intervalo en el que funcionan los motores de emergencia, con t2 > t1.

P2.- **De vuelta a las EDOs**
Resuelva la siguiente EDO:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 2 \\ e^{-(t-2)} & si \quad t > 2 \end{cases}$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -1$$

P3.- **Delta de Dirac**
(a) Resuelva la ecuación

$$x'' + x = \delta(t) - \delta(t - \pi), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

(b) Encuentre explicitamente la solución de la siguiente ecuación:

$$y'' + 60y^1 + 1000y = 10\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \delta\left(t - \frac{n\pi}{10}\right)$$

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

(Ind: Encuentre una expresión para $y(t)$ en términos de una serie y luego evalúe la suma finita que obtendrá cuando $\frac{\mathrm{n}\pi}{10} < t \leq \frac{(\mathrm{n}+1)\pi}{10}$.

Resumen

Def. 1 (Transformada de Laplace): Dada $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ se llama transformada de Laplace de f a la función:

$$L[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

que asocia a $s \in \mathbb{R}$ el valor $L[f](s)$ cuando la integral converge.

Def. 2 (Asíntota de la Transformada): Si la transformada de Laplace de una función existe para $s > c$, a la mínima cota c se le llama asíntota de la transformada.

Prop. 1: La transformada de Laplace es un operador lineal. Es decir, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y si f y g son funciones de $[0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$ tales que $L[f](s)$ y $L[g](s)$ existen, entonces:

$$L[f + \lambda g](s) = L[f](s) + \lambda L[g](s).$$

Def. 3 (Discontinuidad de Salto): Una función f tiene una discontinuidad de salto en $a \in Dom(f)$ si los límites laterales $lím_{x\to a^+} f(x)$ y $lím_{x\to a^-} f(x)$ existen, son finitos y distintos.

Def. 4 (Continua por pedazos): Una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ se dice continua por pedazos si tiene un número finito o numerable de discontinuidades de salto en $[0, +\infty)$, pero sobre cada subintervalo acotado de $[0, +\infty)$ tiene a lo más un número finito de estas.

Def. 5 (Orden exponencial): Una función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es de orden exponencial si existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para todo $t \geq 0$.Al menor de tales α se le llama orden exponencial de f. Gráficamente, el hecho de tener orden exponencial significa que la función está encerrada entre $Me^{\alpha t}$ y $-Me^{\alpha t}$.

Def. 6 (C_α): El espacio C_α es el conjunto de las funciones $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que son continuas por pedazos y de orden exponencial α. Es un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones de $[0, +\infty)$ en $\mathbb{R}$.

Prop. 2: Si $f \in C_\alpha$ entonces para todo $s > \alpha$, existe $L[f](s)$ (y converge absolutamente). Además:

$$|L[f](s)| \leq \frac{M}{s - \alpha}$$

para todo $s > \alpha$. En particular, $lím_{s\to+\infty} L[f(t)](s) = 0$.

Teo. 1 (Función escalon de Heaviside y su transformada): Se define como:

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ \\ 1 & si \quad t \geq a \end{cases}$$

Si $a = 0$, entonces la denotamos simplemente como H. Su transformada de Laplace es:

$$L[H_a](s) = \frac{1}{s} e^{-as}$$

Teo. 2: Si $F(s) = L[f](s)$, y $a > 0$ entonces:

$$L[f(t - a)H(t - a)](s) = e^{as} F(s)$$

Prop. 3 (Fórmulas de traslación): Las fórmulas:

1. $L[e^{at} f(t)](s) = F(s - a)$, con $L[f(t)](s) = F(s)$
2. $L[H(t - a)f(t - a)](s) = e^{-as} L[f](s)$

Se les llama fórmulas de traslación.

Prop. 4: Sea $f \in C_\alpha$ derivable n veces. Entonces, para la derivada n-ésima su tranformada de Laplace es:

$$L[f^{(n)}](s) = s^n L[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{n-k-1}(0^+)$$

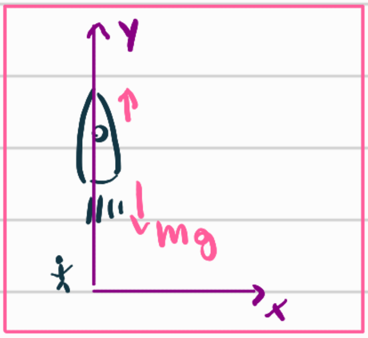
Teo. 3 (Delta de Dirac y su transformada): Se define como:

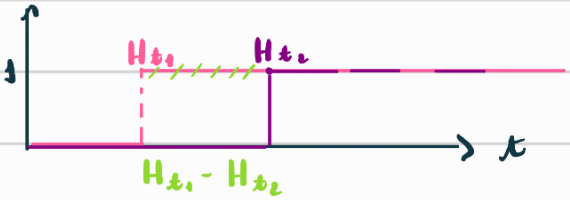
$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} +\infty & si \quad t = t_0 \\ \\ 0 & si \quad t \neq t_0 \end{cases}$$

Si $a = 0$, entonces la denotamos simplemente como δ. Su transformada de Laplace es:

$$L[\delta(t - t_0)](s) = e^{-st_0}$$

P1.- **Cohete a la luna** Un cohete despega con velocidad inicial v_0 desde la Tierra en forma vertical. Luego de algunos segundos, se activan los motores de emergencia, por lo que adquiere una aceleración $a > 0$ durante un intervalo de tiempo breve. Si la gravedad de la Tierra es g, encuentre la ecuación de movimiento del cohete suponiendo que tiene masa m y (t1, t2) es el intervalo en el que funcionan los motores de emergencia, con t2 > t1.





$$\cancel{m} Y'' = -\cancel{m}g + \cancel{m}a(H_{t_1}(t) - H_{t_2})$$

Nos queda la sgt. EDO con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} Y'' = -g + a(H_{t_1} - H_{t_2}) \\ Y(0) = 0 \quad \rightsquigarrow \text{parte del suelo} \\ Y'(0) = v(0) \quad \rightsquigarrow \text{velocidad inicial} \end{cases}$$

Apliquemos la transformada de Laplace:

$$\underbrace{\mathcal{L}[Y''](s)}_{\heartsuit} = \mathcal{L}[-g + a(H_{t_1} - H_{t_2})](s)$$
$$= -g\mathcal{L}[1] + a(\mathcal{L}[H_{t_1}] - \mathcal{L}[H_{t_2}])$$
$$= -g/s + a\left(\frac{1}{s}e^{-t_1 s} - \frac{1}{s}e^{-t_2 s}\right)$$

$$L[f^{(n)}](s) = s^n L[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \overbrace{f^{n-k-1}}^{\text{derivadas}}(0^+)$$

Calculemos $\heartsuit$:

$$\mathcal{L}[Y''](s) = s^2 L(Y)(s) - \sum_{k=0}^{1} s^k f^{n-k-1}(0^+)$$

$$= s^2 L[Y](s) - \underbrace{Y'(0^+)}_{v(0)} - s\underbrace{Y(0^+)}_{0}$$

De aquí deducimos que:

$$s^2 L[Y](s) - v_0 = -g/s + a\left(\frac{1}{s}e^{-t_1 s} - \frac{1}{s}e^{-t_2 s}\right)$$

$$\iff L[Y](s) = -\frac{g}{s^3} + \frac{a}{s^3}(e^{-t_1 t} - e^{-t_2 t}) + \frac{v_0}{s^2}$$

$$\Rightarrow Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\underbrace{-\frac{g}{s^3}}_{1} + \underbrace{\frac{a}{s^3}}_{2}\underbrace{(e^{-t_1 s} - e^{-t_2 s})}_{3} + \underbrace{\frac{v_0}{s^2}}_{4}\right]$$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s-\lambda}$
$H_a(t)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$P_{ab}(t)$	$\frac{1}{s}(e^{-as}-e^{-bs})$
$e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(s-\lambda)^k}$
$\frac{e^{\sigma t}}{w}\operatorname{sen}(wt)$	$\frac{1}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$e^{\sigma t}\cos(wt)$	$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$t\operatorname{sen}(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{1}{a}\operatorname{sen}(at)-t\cos(at)$	$\frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2}$

(1) $$\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{g}{s^3}\right] = -g\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] \qquad \lambda=0,\ k=3$$

$$= -g\frac{t^2}{(3-1)!} = -\frac{gt^2}{2}$$

(4) $$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{v_0}{s^2}\right] = v_0\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] \qquad \lambda=0,\ k=2$$

$$= v_0 t$$

Teo. : Si $F(s)=L[f](s)$, y $a>0$ entonces:

$$L[f(t-a)H(t-a)](s) = e^{-as}F(s)$$

(2) $$\frac{a}{s^3}e^{-t_1 s} = e^{-t_1 s}\cdot\underbrace{\frac{a}{s^3}}_{F(s)=a\mathcal{L}[t^2/2]}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^3}e^{-t_1 s}\right] = a\frac{(t-t_1)^2}{2}H(t-t_1)$$

(3) $$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^3}e^{-t_2 s}\right] = a\frac{(t-t_2)^2}{2}H(t-t_2)$$

Finalmente, nos queda:

$$Y(t) = -g\frac{t^2}{2} + a\frac{(t-t_1)^2}{2}H(t-t_1) + a\frac{(t-t_2)^2}{2}H(t-t_2) + v_0 t.$$

P2.- **De vuelta a las EDOs**

Resuelva la siguiente EDO:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y = \begin{cases} 0 & si\quad t\le 2 \\ e^{-(t-2)} & si\quad t>2\end{cases}$$

$$y(0)=1,\ y'(0)=-1$$

De la P_1 recordamos que:

- $L[Y''](s) = s^2L[Y](s) - Y'(0^+) - sY(0^+)$
  $= s^2L[Y](s) + 1 - s$

$$L[f^{(n)}](s) = s^nL[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1}s^k \underbrace{f^{n-k-1}}_{\text{derivadas}}(0^+)$$

Además:

- $L[4Y'](s) = 4L[Y'](s) = 4(sL[Y](s) - Y(0^+))$
  $= 4sL[Y](s) - 4$

- $L[0](s) = 0$
- $L[e^{-(t-2)}](s) = L[e^{-t}e^{2}] = e^{2}L[e^{-t}] = \frac{e^{2}}{s+1}$

Si $t \leq 2$

$$s^2 L[Y](s) + 1 - s + 4s\,L[Y](s) - 4 + 4L[Y](s) = 0$$

$$L[Y](s)\,(s^2 + 4s + 4) = 3 + s$$

$$L[Y](s) = \frac{3-s}{s^2+4s+4} = \frac{3+s}{(s+2)^2} = \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{s+2}{(s+2)^2}$$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s-\lambda}$
$H_a(t)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$P_{ab}(t)$	$\frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$
$e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(s-\lambda)^k}$
$\frac{e^{\sigma t}}{w}\operatorname{sen}(wt)$	$\frac{1}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$e^{\sigma t}\cos(wt)$	$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$t\operatorname{sen}(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{1}{a}\operatorname{sen}(at) - t\cos(at)$	$\frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2}$

Así

$$Y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2} - \frac{s+2}{(s+2)^2}\right]$$

$$= \underbrace{L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right]}_{\substack{\lambda = -2 \\ k = 2}} - \underbrace{L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2}\right]}_{\substack{\sigma = -2 \\ w = 0}}$$

$$= e^{-2t}t - e^{-2t}\cancelto{1}{\cos(0)}$$

$$= e^{-2t}t - e^{-2t}$$

Si $t > 2$

$$s^2 L[Y](s) + 1 - s + 4s\,L[Y](s) - 4 + 4L[Y](s) = \frac{e^2}{s+1}$$

$$L[Y](s) = \underbrace{\frac{e^2}{(s+1)(s+2)^2}}_{(♡)} + \boxed{\frac{3+s}{(s+2)^2}} \quad ✓$$

Usamos fracciones parciales en ♡:

$$\frac{e^2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B+Cs}{(s+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^2 = A(s^2+4s+4) + (B+Cs)(s+1)$$

$$= As^2 + 4sA + 4A + Bs + B + Cs^2 + Cs$$

$$= (A+C)s^2 + (4A+B+C)s + 4A+B$$

$$\begin{cases} A+C=0 & \Leftrightarrow \quad C=-A \\ 4A+B+C=0 & \\ 4A+B=e^2 & \Leftrightarrow \quad B=e^2-4A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{4A} + e^2 - \cancel{4A} - A = 0 \Leftrightarrow A = e^2$$

$$B = -3e^2$$

$$C = -e^2$$

Así, concluimos que:

$$\frac{e^2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{e^2}{s+1} - \frac{3e^2+e^2 s}{(s+2)^2} = \frac{e^2}{s+1} - \frac{e^2}{(s+2)^2} - \frac{2e^2+e^2 s}{(s+2)^2}$$

$\lambda=-1$ $\lambda=-2$, $k=2$ $\sigma=-2$, $w=0$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s-\lambda}$
$H_a(t)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$P_{ab}(t)$	$\frac{1}{s}(e^{-as}-e^{-bs})$
$e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(s-\lambda)^k}$
$\frac{e^{\sigma t}}{w}\operatorname{sen}(wt)$	$\frac{1}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$e^{\sigma t}\cos(wt)$	$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$t\operatorname{sen}(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{1}{a}\operatorname{sen}(at)-t\cos(at)$	$\frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^2}{(s+1)(s+2)^2}\right] = e^{-t} - e^2 e^{-2t} t - e^2 e^{-2t}$$

$$= e^{-t} - e^{-2(t-1)} t - e^{-2(t-1)}$$

Así, podemos concluir que:

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2(t-1)} t - e^{-2(t-1)} + e^{-2t} t - e^{-2t} \quad //$$

(a) Resuelva la ecuación

$$x'' + x = \delta(t) - \delta(t-\pi), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Aplicamos la transformada de Laplace

- $L[x''](s) = s^2 L[x](s) - x'(0^+) - s\,x(0^+)$
  $= s^2 L[x]$

Teorema

$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$

- $L[\delta(t)](s) = L[\delta(t-0)](s) = e^{-s\cdot 0} = 1$
- $L[\delta(t-\pi)](s) = e^{-\pi s}$

Así, nos queda:

Teo. : Si $F(s) = L[f](s)$, y $a > 0$ entonces:

$$L[f(t-a)H(t-a)](s) = e^{as}F(s)$$

$$s^2 L[x] + L[x] = 1 - e^{-\pi s}$$
$$L[x](1+s^2) = 1 - e^{-\pi s}$$
$$L[x] = \frac{1-e^{-\pi s}}{1+s^2} = \frac{1}{1+s^2} - \frac{e^{-\pi s}}{1+s^2}, \quad F(s) = \frac{1}{1+s^2} = L[\sin(t)]$$

$\sigma = 0$, $w = 1$ $\qquad a = -\pi$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s-\lambda}$
$H_a(t)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$P_{ab}(t)$	$\frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$
$e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(s-\lambda)^k}$
$\frac{e^{\sigma t}}{w}\operatorname{sen}(wt)$	$\frac{1}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$e^{\sigma t}\cos(wt)$	$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+w^2}$
$t\operatorname{sen}(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{1}{a}\operatorname{sen}(at) - t\cos(at)$	$\frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2}$

De aquí, tenemos:

$$x = L^{-1}\left[\frac{1}{1+s^2}\right] - L^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{1+s^2}\right]$$

$$= \sin(t) - \sin(t-\pi)H(t-\pi)$$

(b) Encuentre explícitamente la solución de la siguiente ecuación:

$$y'' + 60y^1 + 1000y = 10\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\delta\left(t - \frac{n\pi}{10}\right)$$
$$y(0) = y'(0) = 0.$$

(Ind: Encuentre una expresión para $y(t)$ en términos de una serie y luego evalúe la suma finita que obtendrá cuando $\frac{n\pi}{10} < t \leq \frac{(n+1)\pi}{10}$.

Aplicando transformada nos queda:

$$L[f^{(n)}](s) = s^n L[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \underbrace{f^{n-k-1}}_{\text{derivadas}}(0^+)$$

- $L[y''](s) = s^2 L[y](s) - \overset{0}{\cancel{y'(0^+)}} - s\,\overset{0}{\cancel{y(0^+)}}$
- $60\,L[y'](s) = 60\,s\,L[y]$
- $\delta\left(t - \frac{n\pi}{10}\right) = e^{\frac{n\pi}{10}s}$

Y nos queda para N fijo:

$$s^2 L[Y](s) + 60s\, L[Y](s) + 1000\, L[Y] = 10 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n e^{\frac{n\pi}{10}s}$$

$$\Leftrightarrow L[Y](s) = 10 \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n e^{\frac{n\pi}{10}s}}{s^2 + \underbrace{60s}_{2\cdot 30\cdot 6} + 1000} = 10 \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n e^{\frac{n\pi}{10}s}}{(s+30)^2 + 100}$$

$30^2 = 900$ $\quad a = \frac{n\pi}{10}$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s-\lambda}$
$H_a(t)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$
$P_{ab}(t)$	$\frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$
$e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(s-\lambda)^k}$
$\frac{e^{\sigma t}}{w}\operatorname{sen}(wt)$	$\frac{1}{(s-\sigma)^2 + w^2}$
$e^{\sigma t}\cos(wt)$	$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2 + w^2}$
$t\operatorname{sen}(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{1}{a}\operatorname{sen}(at) - t\cos(at)$	$\frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2}$

Teo. : Si $F(s) = L[f](s)$, y $a > 0$ entonces:

$$L[f(t-a)H(t-a)](s) = e^{as}F(s)$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+30)^2 + 100} = L\left[\frac{e^{-30t}}{10}\sin(10t)\right]$$

$\sigma = 30$
$w = 10$

Así, nos queda

$$Y = \sum_{n=0}^{N} \frac{e^{-30(t-\frac{n\pi}{10})}}{10} \underbrace{\sin\left(10\left(t - \frac{n\pi}{10}\right)\right)}_{\sin(10t - n\pi) = (-1)^n \sin(10t)} H\left(t - \frac{n\pi}{10}\right)$$

$$Y = e^{-30t}\sin(10t) \sum_{n=0}^{N} H\left(t - \frac{n\pi}{10}\right) e^{3n\pi}$$

Def. 6 (Función escalon de Heaviside y su transformada): Se define como:

$$H_a(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a \end{cases}$$

Ahora, tomemos $t \in \left(\underbrace{\frac{N\pi}{10}}_{0<}, \frac{(N+1)\pi}{10}\right)$

$$Y = e^{30t}\sin(10t) \underbrace{\sum_{n=0}^{N} e^{3\pi n}}$$

$$\sum_{n=0}^{N} e^{3\pi n} = \sum_{n=0}^{N} (e^{3\pi})^n = \frac{1 - e^{3\pi(N+1)}}{1 - e^{3\pi}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$\hookrightarrow r = e^{3\pi}$

Así, tenemos que

$$Y(t) = e^{-30t}\sin(10t)\left(\frac{1 - e^{3\pi(N+1)}}{1 - e^{3\pi}}\right), \quad \frac{N\pi}{10} < t \leq \frac{(N+1)\pi}{10}$$