Auxiliar 9: Laplace variado

Virtual

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Iñaki Ramírez, Rocío Yáñez

P1.- **Cohete a la luna** Un cohete despega con velocidad inicial v_0 desde la Tierra en forma vertical. Luego de algunos segundos, se activan los motores de emergencia, por lo que adquiere una aceleración $a > 0$ durante un intervalo de tiempo breve. Si la gravedad de la Tierra es g, encuentre la ecuación de movimiento del cohete suponiendo que tiene masa m y (t1, t2) es el intervalo en el que funcionan los motores de emergencia, con t2 > t1.

P2.- **De vuelta a las EDOs**
Resuelva la siguiente EDO:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 2 \\ e^{-(t-2)} & si \quad t > 2 \end{cases}$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -1$$

P3.- **Delta de Dirac**
(a) Resuelva la ecuación

$$x'' + x = \delta(t) - \delta(t - \pi), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

(b) Encuentre explicitamente la solución de la siguiente ecuación:

$$y'' + 60y^1 + 1000y = 10\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\delta\left(t - \frac{n\pi}{10}\right)$$
$$y(0) = y'(0) = 0.$$

(Ind: Encuentre una expresión para $y(t)$ en términos de una serie y luego evalúe la suma finita que obtendrá cuando $\frac{\mathrm{n}\pi}{10} < t \leq \frac{(\mathrm{n}+1)\pi}{10}$.

Resumen

Def. 1 (Transformada de Laplace): Dada $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ se llama transformada de Laplace de f a la función:

$$L[f](s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$$

que asocia a $s\in\mathbb{R}$ el valor $L[f](s)$ cuando la integral converge.

Def. 2 (Asíntota de la Transformada): Si la transformada de Laplace de una función existe para $s>c$, a la mínima cota c se le llama asíntota de la transformada.

Prop. 1: La transformada de Laplace es un operador lineal. Es decir, si $\lambda\in\mathbb{R}$ y si f y g son funciones de $[0,+\infty)$ en $\mathbb{R}$ tales que $L[f](s)$ y $L[g](s)$ existen, entonces:

$$L[f+\lambda g](s)=L[f](s)+\lambda L[g](s).$$

Def. 3 (Discontinuidad de Salto): Una función f tiene una discontinuidad de salto en $a\in Dom(f)$ si los límites laterales $lím_{x\to a^+}f(x)$ y $lím_{x\to a^-}f(x)$ existen, son finitos y distintos.

Def. 4 (Continua por pedazos): Una función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ se dice continua por pedazos si tiene un número finito o numerable de discontinuidades de salto en $[0,+\infty)$, pero sobre cada subintervalo acotado de $[0,+\infty)$ tiene a lo más un número finito de estas.

Def. 5 (Orden exponencial): Una función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ es de orden exponencial si existen $\alpha\in\mathbb{R}$ y $M>0$ tales que $|f(t)|\leq Me^{\alpha t}$ para todo $t\geq 0$.Al menor de tales α se le llama orden exponencial de f. Gráficamente, el hecho de tener orden exponencial significa que la función está encerrada entre $Me^{\alpha t}$ y $-Me^{\alpha t}$.

Def. 6 (C_α): El espacio C_α es el conjunto de las funciones $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ que son continuas por pedazos y de orden exponencial α. Es un subespacio vectorial del espacio de todas las funciones de $[0,+\infty)$ en $\mathbb{R}$.

Prop. 2: Si $f\in C_\alpha$ entonces para todo $s>\alpha$, existe $L[f](s)$ (y converge absolutamente). Además:

$$|L[f](s)|\leq\frac{M}{s-\alpha}$$

para todo $s>\alpha$. En particular, $lím_{s\to+\infty}L[f(t)](s)=0$.

Teo. 1 (Función escalon de Heaviside y su transformada): Se define como:

$$H_a(t)=\begin{cases}0 & si \quad t<a\\ \\ 1 & si \quad t\geq a\end{cases}$$

Si $a=0$, entonces la denotamos simplemente como H. Su transformada de Laplace es:

$$L[H_a](s)=\frac{1}{s}e^{-as}$$

Teo. 2: Si $F(s)=L[f](s)$, y $a>0$ entonces:

$$L[f(t-a)H(t-a)](s)=e^{as}F(s)$$

Prop. 3 (Fórmulas de traslación): Las fórmulas:

1. $L[e^{at}f(t)](s)=F(s-a)$, con $L[f(t)](s)=F(s)$
2. $L[H(t-a)f(t-a)](s)=e^{-as}L[f](s)$

Se les llama fórmulas de traslación.

Prop. 4: Sea $f\in C_\alpha$ derivable n veces. Entonces, para la derivada n-ésima su tranformada de Laplace es:

$$L[f^{(n)}](s)=s^nL[f](s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^kf^{n-k-1}(0^+)$$

Teo. 3 (Delta de Dirac y su transformada): Se define como:

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}+\infty & si \quad t=t_0\\ \\ 0 & si \quad t\neq t_0\end{cases}$$

Si $a=0$, entonces la denotamos simplemente como δ. Su transformada de Laplace es:

$$L[\delta(t-t_0)](s)=e^{-st_0}$$